

Über Vererbbarkeitseigenschaften in topologischen Vektorräumen

Susanne Dierolf

1974

Über Vererbbarkeitseigenschaften
in topologischen Vektorräumen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Fakultät für Mathematik der
Ludwig-Maximilians-Universität in München

Vorgelegt von
Susanne Dierolf
aus Garching
am 9. November 1973



1. Berichterstatter: Professor Dr. Walter Roelcke

2. Berichterstatter: Professor Dr. Jürgen Batt

Tag der mündlichen Prüfung: 4. Dezember 1974

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
§ 0. Vorbemerkungen	6
0.1 Erklärung der verwendeten Symbole	6
0.2 Zusammenstellung der betrachteten Eigenschaften	9
§ 1. Vererbbarkeit bei abgeschlossenen algebraischen Komplementärräumen	13
§ 2. Vererbbarkeit von Teilraum und Quotient auf den Ausgangsraum	31
2.1 Gegenbeispiele erster Art	32
2.2 Gegenbeispiele zweiter Art	39
2.3 Positive Aussagen	47
2.4 Zur Vererbbarkeit der Eigenschaft lokalkonvex	52
§ 3. Vererbbarkeit auf spezielle projektive Limiten	59
3.1 Die obere Grenze einer aufsteigenden Folge von linearen Topologien	59
3.2 Der Durchschnitt einer absteigenden Folge von linearen Teilräumen eines topologischen linearen Raums	64
§ 4. Vertauschbarkeit gewisser Finalprozesse	67
4.1 Die lineare untere Grenze zweier lokalkonvexer Topologien	67
4.2 Der strikte induktive Limes	71
§ 5. Anhang: Hilfsaussagen	74
Literatur	83

EINLEITUNG

Seit dem Jahr 1952, in dem J. Dieudonné seine Arbeit: "Sur les propriétés de permanence de certains espaces vectoriels topologiques" [3] veröffentlichte, beschäftigen sich zahlreiche Mathematiker mit Vererbbarkeitsfragen in topologischen Vektorräumen. Es wurde untersucht, ob sich Eigenschaften topologischer linearer Räume auf projektive oder induktive Limiten, auf (gewisse) Teilräume oder Quotienten, auf Produkte, direkte Summen oder auf die vollständige Hülle vererben. Mit diesem Problemkreis beschäftigen sich Arbeiten von J. Dieudonné, A. Grothendieck, G. Köthe, T. und Y. Kōmura, M. Valdivia, M. de Wilde, um nur einige Namen zu nennen. In der vorliegenden Arbeit soll nun eine Auswahl der wichtigsten Eigenschaften topologischer linearer Räume in einigen weiteren Situationen auf Vererbbarkeit untersucht werden.

So wird in § 1 ein topologischer linearer Raum X betrachtet, der algebraisch direkte Summe zweier abgeschlossener linearer Teilräume L und M ist. Es wird hierbei untersucht, ob sich Eigenschaften von L und M auf X , von X/L und X/M auf X , von X auf L und M bzw. von X auf X/L und X/M vererben. In jedem dieser vier Fälle läßt sich eine Methode zur Konstruktion von topologischen linearen Räumen angeben, die für eine Vielzahl von Eigenschaften simultan Gegenbeispiele liefert.

In § 2 wird ein topologischer linearer Raum X und ein linearer Teilraum L von X betrachtet. Hierbei ist die Frage von Interesse, welche Eigenschaften sich von dem Teilraum L und dem Quotienten X/L auf X vererben. Für eine Reihe von Eigenschaften ist diese Frage bereits positiv beantwortet worden, so z.B. bei topologischen Gruppen X mit Normalteiler L für die Eigenschaften kompakt, lokalkompakt, separiert, separabel, zusammenhängend, halbmetrisierbar (Hewitt - Ross [6]) und vollständig (N. Bourbaki [2]), bei topologischen linearen Räumen für lokalbeschränkt und bei lokalkonvexen Räumen für halbnormierbar und tonneliert (W. Roelcke [13]).

Als Fragestellung in § 2 verbleibt somit, weitere Eigenschaften auf Vererbbarkeit in obiger Situation zu untersuchen. Hierbei ergibt sich eine positive Antwort für abzählbar tonneliert, Schwartz-Raum und nuklear. Für die Eigenschaften (ultra-)bornologisch, Abschwächungen von vollständig, reflexiv, Montelraum, quasitunneliert, DF-Raum und distinguert kann man Gegenbeispiele angeben, wobei zur Konstruktion der Gegenbeispiele im wesentlichen zwei Methoden entwickelt werden. Was die Eigenschaft lokalkonvex betrifft, so werden zu dem Problem einige Aussagen gemacht. Die Frage selbst bleibt jedoch unbeantwortet. In § 3 wird die Frage nach der Vererbbarkeit von Eigenschaften bezüglich der Bildung spezieller projektiver Limiten behandelt, nämlich der Bildung der oberen Grenze einer aufsteigenden Folge linearer Topologien und des Durchschnitts einer absteigenden Folge von linearen Teilräumen.

Anschließend wird noch ein weiterer Fragenkomplex angeschnitten, den man nicht mehr direkt unter Vererbbarkeit einordnen kann. Es handelt sich hierbei um das Problem, ob die Bildung der assoziierten (quasi-)tonnelierten bzw. (ultra-)bornologischen Topologie mit der Bildung des induktiven Limes bzw. der lokalkonvexen unteren Grenze kommutiert. Hierbei wird gleichzeitig ein von H. Porta in [11] gestelltes Problem beantwortet.

Einige Hilfssätze, die im weiteren benötigt werden, sind in einem Anhang zusammengestellt.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Dr. W. Roelcke für die Anregung und das stete Interesse am Fortgang dieser Arbeit herzlich danken. Herrn Dr. Pawel Lurje und Herrn Dr. Helmut Pfister danke ich herzlich für wertvolle Anregungen und interessante Gespräche.

§ 0. Vorbemerkungen

0.1 Erklärung der verwendeten Symbole.

Ist (X, τ) ein topologischer linearer Raum und $L \subset X$ ein linearer Teilraum, so bezeichne $\tau \cap L$ die von τ auf L induzierte Topologie und τ/L die Quotiententopologie auf X/L . Die obere Grenze aller lokalkonvexen Topologien auf X , die gröber als τ sind, ist offenbar die feinste lokalkonvexe Topologie auf X , die gröber als τ ist. Wir nennen sie die zu τ assoziierte lokalkonvexe Topologie und bezeichnen sie mit dem Symbol τ_1 .

X^* bezeichne das algebraische Dual von X und $(X, \tau)'$ (oder einfach X' , wenn keine Verwechslungen möglich sind) das stetige Dual von (X, τ) .

Ein vollständiger Oberraum $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ von (X, τ) , der $\overline{X}^{\tilde{\tau}} = \tilde{X}$ und $\{0\}^{\tilde{\tau}} \subset X$ erfüllt, heiße vollständige Hulle von (X, τ) . Nach W. Roelcke [24 I, Satz 11.2] besitzt jeder topologische lineare (nicht notwendig separierte) Raum (X, τ) eine vollständige Hulle, die bis auf topologische Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Ist $A \subset X$, so bezeichne $[A]$ den linearen Spann von A in X ; ist $A = \{a\}$ einpunktig, dann schreiben wir $[a]$ statt $[\{a\}]$. Wenn $[A]$ endlich dimensional ist, nennen wir auch A endlich dimensional. Ist A absolutkonvex, so bezeichne $([A], p_A)$ den durch das Eichfunktional p_A von A halbnormierten linearen Spann von A . Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt lokale Cauchy-Folge bzw. lokal-konvergent gegen $x \in X$, wenn es eine absolutkonvexe beschränkte Teilmenge B in X so gibt, daß $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $([B], p_B)$ Cauchy-Folge ist bzw. in $([B], p_B)$ gegen x konvergiert. Eine Teilmenge C von X heißt lokaldicht in X , wenn zu jedem $x \in X$ eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in C existiert, die lokal gegen x konvergiert.

$\Delta X := \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ bzw. $\Delta_- X := \{(x, -x) \in X \times X : x \in X\}$ seien die Symbole für die Haupt- bzw. Nebendiagonale in $X \times X$.

Ist (Y, σ) ein weiterer topologischer linearer Raum, so bezeichne $\tau \times \sigma$ die Produkttopologie auf $X \times Y$. Im Fall $X = Y$ schreiben wir $\tau \vee \sigma$ für die obere Grenze und $\tau \wedge \sigma$ für die lineare untere Grenze der Topologien τ und σ . Wenn τ und σ lokalkonvex sind, dann ist offenbar auch $\tau \wedge \sigma$ lokalkonvex.

Sind L und M algebraisch direkte Summanden in X , so schreiben wir: $X = L \dot{+} M$. Sind lineare Topologien γ_L und γ_M auf L bzw. M vorgegeben, so bezeichne $\gamma_L \oplus \gamma_M$ die Topologie der topologisch direkten Summe von (L, γ_L) und (M, γ_M) auf X . Ist (X, γ) topologisch direkte Summe von L und M , so schreiben wir dafür $(X, \gamma) = L \oplus M$.

Eine Teilmenge T von (X, γ) heißt bornivor, wenn sie jede beschränkte Teilmenge von X absorbiert; T heißt Tonne, wenn T absolutkonvex, absorbant und abgeschlossen ist; eine Tonne T in (X, γ) , die Durchschnitt von abzählbar vielen absolutkonvexen und abgeschlossenen Nullumgebungen ist, bezeichnen wir als σ -Tonne.

Ist $\langle X, Y \rangle$ ein duales Paar vermöge einer Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$, so schreiben wir $\sigma(X, Y)$ ($\sigma(Y, X)$) bzw. $\tau(X, Y)$ ($\tau(Y, X)$) bzw. $\beta(X, Y)$ ($\beta(Y, X)$) für die schwache Topologie bzw. die Mackey-Topologie bzw. die starke Topologie auf X bezüglich Y (auf Y bezüglich X). Für $C \subset X$ bzw. $D \subset Y$ definieren wir:

$C^{OY} := \{y \in Y: | \langle x, y \rangle | \leq 1 \ \forall x \in C\}$ und
 $D^{OX} := \{x \in X: | \langle x, y \rangle | \leq 1 \ \forall y \in D\}$. Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir C^O statt C^{OY} und D^O statt D^{OX} . X und X^* bilden in kanonischer Weise ein duales Paar.

Ist $L \subset X$ ein linearer Teilraum, so schreiben wir manchmal $L^\perp$ statt L^{OX^*} .

Für eine Familie $((X_i, \gamma_i))_{i \in I}$ lokalkonvexer Räume bezeichne $\prod_{i \in I} \gamma_i$ die Produkttopologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ und $\bigoplus_{i \in I} \gamma_i$ die Topologie der lokalkonvexen direkten (äußeren) Summe auf $\bigoplus_{i \in I} X_i$.

Ist speziell $X_i = X_k =: X$ für alle $i, k \in I$, so bezeichne $\bigvee_{i \in I} \gamma_i$ die obere Grenze der Topologien γ_i und $\bigwedge_{i \in I} \gamma_i$ die lokalkonvexe untere Grenze der Topologien γ_i auf X .

Sind (X, γ) und (Y, σ) lokalkonvexe Räume und $f: X \rightarrow Y$ linear, dann heißt f fast offen (bzw. fast stetig), wenn für jede Nullumgebung U in X (bzw. jede Nullumgebung V in Y) die Menge $\overline{f(U)}^\sigma$ eine σ -Nullumgebung in Y ist (bzw. $f^{-1}(V)$ eine γ -Nullumgebung in X ist).

f heißt absolutsummierend, wenn für jede summierbare Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ absolutsummierbar in Y ist. Hierbei heißt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ summierbar, wenn das Netz der endlichen Partialsummen $(\sum_{i \in F} x_i)_{F \subset \mathbb{N} \text{ endlich}}$ ein Cauchy-Netz in $(X, \mathcal{T})$ bildet. Eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Y heißt absolutsummierbar, wenn für jede stetige Halbnorm $p: (Y, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} p(y_n)$ konvergent ist.

$\mathbb{K}$ bezeichne den Körper der reellen oder komplexen Zahlen.

Ist I eine Menge, so seien $\mathbb{K}^{(I)}$ und $\mathbb{K}^{[I]}$ durch

$$\mathbb{K}^{(I)} := \{(x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I : \text{card} \{i \in I : x_i \neq 0\} < \infty\} \quad \text{und}$$

$$\mathbb{K}^{[I]} := \{(x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I : \text{card} \{i \in I : x_i \neq 0\} \leq \text{card}(I)\}$$

definiert.

0.2 Zusammenstellung der betrachteten Eigenschaften.

In den folgenden Paragraphen werden Eigenschaften topologischer linearer Räume auf ihre Vererbbarkeit in verschiedenen Situationen untersucht. Es werden dabei im wesentlichen folgende Eigenschaften betrachtet:

1. lokalkonvex
2. halbmétrisierbar
3. halbnormierbar
4. tonnelliert (G.Köthe [13,p.259])
5. quasitonnelliert (G.Köthe [13,p.303])
6. abzählbar tonnelliert (im Sinne von infrabarrelled
7. abzählbar quasitonnelliert bzw. infraevaluable in
De Wilde, M., Houet, C. [7, p.257]))
8. bornologisch (G.Köthe [13, p.382])
9. ultrabornologisch (N.Bourbaki [3, Ch.III, § 3, ex.11])
10. vollständig
11. quasivollständig (G.Köthe [13, p.213])
12. folgenvollständig
13. lokalvollständig (G.W.Mackey [17, p.179/180])
14. B-vollständig (oder Ptak-Raum) (V.Pták [20, p.55])
15. B_r -vollständig (V.Pták [20, p.50])
16. reflexiv (G.Köthe [13, p.304])
17. halbrelexiv (G.Köthe [13, p.301])
18. Montel-Raum (G.Köthe [13, p.372])
19. Semi-Montel-Raum (J.Horváth [12, p.231])
20. distinguirt (G.Köthe [13, p.309])
21. DF-Raum (G.Köthe [13, p.399])
22. Mackey-Raum (J.L.Kelley, I.Namioka
[12a, p.173])
23. Schwartz-Raum (J.Horváth [12, p.275])
24. nuklear (A.Pietsch [18, p.63])

Alle hier aufgeführten Eigenschaften werden - meist im Gegensatz zu der zitierten Literatur - ohne die zusätzliche Eigenschaft separiert verstanden.

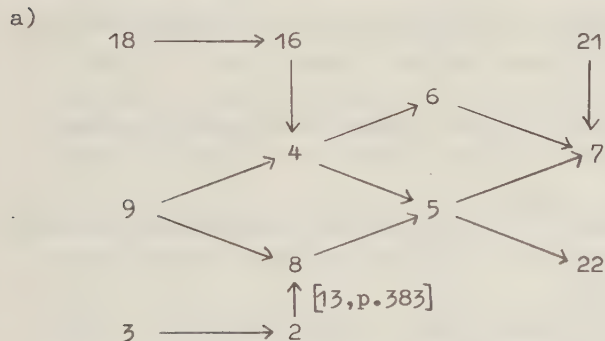
Der Vollständigkeit halber werden hier einige der Definitionen - oder zur Definition äquivalente Charakterisierungen - angeführt.

Es sei (X, τ) ein lokalkonvexer Raum. Dann heißt (X, τ)

4. tonneliert, wenn jede Tonne eine Nullumgebung ist
($\iff$ jede $\mathcal{G}(X', X)$ -beschränkte Teilmenge von X' ist gleichgradig stetig) ,
5. quasitonneliert, wenn jede bornivore Tonne eine Nullumgebung ist
($\iff$ jede $\beta(X', X)$ -beschränkte Teilmenge von X' ist gleichgradig stetig) ,
6. abzählbar tonneliert, wenn jede $\mathcal{G}$ -Tonne eine Nullumgebung ist
($\iff$ jede $\mathcal{G}(X', X)$ -beschränkte Vereinigung einer Folge gleichgradig stetiger Teilmengen von X' ist gleichgradig stetig) ,
7. abzählbar quasitonneliert, wenn jede bornivore $\mathcal{G}$ -Tonne eine Nullumgebung ist
($\iff$ jede $\beta(X', X)$ -beschränkte Vereinigung einer Folge gleichgradig stetiger Teilmengen von X' ist gleichgradig stetig) ,
8. bornologisch, wenn jede bornivore absolutkonvexe Menge eine Nullumgebung ist
($\iff (X, \tau)$ ist lokalkonvexer induktiver Limes von halbnormierten Räumen),
9. ultrabornologisch, wenn (X, τ) lokalkonvexer induktiver Limes von vollständigen halbnormierten Räumen ist ,
13. lokalvollständig, wenn jede lokale Cauchy-Folge in (X, τ) konvergiert ,
14. B-vollständig, wenn jede surjektive stetige lineare fast offene Abbildung auf einen separierten lokalkonvexen Raum offen ist,
15. B_{τ} -vollständig, wenn jede bijektive stetige lineare fast offene Abbildung auf einen separierten lokalkonvexen Raum offen ist ,
17. halbreflexiv, wenn jede τ -beschränkte Teilmenge von X relativ kompakt in $(X, \mathcal{G}(X, X'))$ ist,
16. reflexiv, wenn (X, τ) tonneliert und halbreflexiv ist,
19. Semi-Montel-Raum, wenn jede beschränkte Teilmenge von (X, τ) relativ kompakt in (X, τ) ist,
18. Montel-Raum, wenn (X, τ) tonneliert und Semi-Montel-Raum ist,
20. distinguiert, wenn $(X', \beta(X', X))$ tonneliert ist,

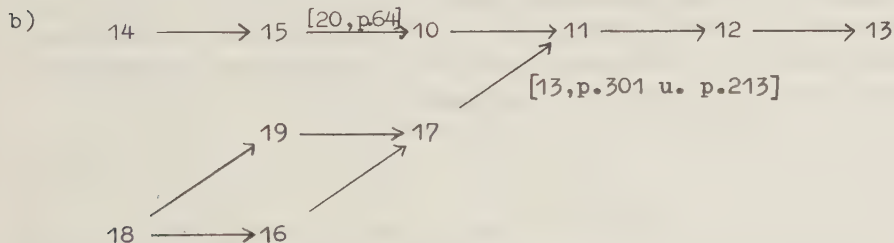
21. DF-Raum, wenn (X, τ) abzählbar quasitonneliert ist und eine Fundamentalfolge der beschränkten Mengen besitzt,
22. Mackey-Raum, wenn $\tau = \tau(X, X')$ erfüllt ist,
23. Schwartz-Raum, wenn zu jeder absolutkonvexen Nullumgebung U eine Nullumgebung V so existiert, daß V in (X, p_U) präkompakt ist,
24. nuklear, wenn zu jeder absolutkonvexen Nullumgebung U eine absolutkonvexe Nullumgebung V so existiert, daß $\text{id}_X: (X, p_V) \longrightarrow (X, p_U)$ absolutsummierend ist.

Für einen lokalkonvexen Raum (X, τ) gelten folgende Implikationen:



Die Gültigkeit aller dieser Implikationen kann man leicht aus den Definitionen ableiten.

Ein lokalkonvexer Raum, der 7 und 22 nicht besitzt, besitzt somit keine der Eigenschaften 2 - 9, 16, 18, 21, 22.



Auch in dieser Übersicht kann man die Gültigkeit der nicht mit einem Zitat versehenen Implikations-Pfeile leicht aus den Definitionen ableiten.

Ein lokalkonvexer Raum, der 13 nicht besitzt, besitzt somit keine der Eigenschaften 10 - 19.

c) $24 \xrightarrow{[18,4.1.1.u.3.1.5]} 23$.

Ferner gilt:

Die Eigenschaften 4 - 9 sowie 22 vererben sich auf lokalkonvexe Finaltopologien.

Für 4 - 9 kann man dies leicht aus den Definitionen entnehmen, für 22 siehe G.Köthe [13,p.295].

Die Eigenschaft 21 vererbt sich auf Quotienten und abzählbare direkte Summen (G.Köthe [13,p.405]).

Die Eigenschaften 2 und 3 vererben sich auf Quotienten und endliche direkte Summen.

Die Eigenschaften 1, 23 und 24 vererben sich auf Produkte und lineare Teilräume (für 23 siehe J.Horváth [12,p.278], für 24 siehe A.Pietsch [18,p.76]).

Die Eigenschaften 10 - 13, 17, 19 vererben sich auf Produkte und abgeschlossene lineare Teilräume, wie man den Definitionen leicht entnehmen kann.

Die Eigenschaften 14 und 15 vererben sich auf abgeschlossene lineare Teilräume (für 14 siehe S.H.Collins [4,p.277], für 15 siehe V.Pták [20,p.53]).

Ferner vererben sich alle betrachteten Eigenschaften von einem Raum auf den assoziierten separierten.

Die Eigenschaften 1 - 19, 21 - 24 vererben sich folglich von einem endlichen Produkt auf die Faktoren, 1 - 13, 16 - 19, 21 - 24 von zwei Faktoren auf ihr Produkt. Beides gilt auch für die Eigenschaft 20 = distinguert, wie man mit Hilfe von G.Köthe [13,p.290] leicht nachweisen kann.

Daß sich 14 = B-vollständig und 15 = B_r -vollständig von zwei Faktoren nicht auf ihr Produkt vererben, kann man dem Beispiel auf Seite 32 ff in G.Köthe [14] entnehmen.

§ 1. Vererbbarkeit bei abgeschlossenen algebraischen Komplementärräumen.

Die meisten Eigenschaften topologischer linearer Räume vererben sich bekanntlich von einer endlichen topologisch direkten Summe auf alle Summanden und umgekehrt. Wie in 0.2 gezeigt wurde, tun dies z.B. mit Ausnahme von B - und B_r -vollständig alle dort aufgeführten Eigenschaften.

In diesem Paragraphen soll die Vererbbarkeit dieser Eigenschaften in folgender Situation untersucht werden: (X, τ) ist (nur) algebraisch direkte Summe zweier abgeschlossener linearer Teilräume L und M .

1.1 Es sei E eine Eigenschaft topologischer linearer Räume, (X, τ) ein topologischer linearer Raum, der algebraisch direkte Summe zweier abgeschlossener linearer Teilräume L und M ist. Wir betrachten die Vererbbarkeit der Eigenschaft E von $(L, \tau \cap L)$ und $(M, \tau \cap M)$ auf (X, τ) .

Sind $\tau \cap L$ und $\tau \cap M$ schwache Topologien auf L bzw. M , so impliziert N.Bourbaki [3, Ch.II, § 6, ex.1], daß auch τ eine schwache Topologie auf X ist. Sind $(L, \tau \cap L)$ und $(M, \tau \cap M)$ Geradenprodukte, so ist wegen loc.cit., Ch.II, § 6, ex.1 die Topologie τ lokalkonvex; folglich ist wegen loc.cit., Ch.II, § 6, ex.13 der Raum (X, τ) ebenfalls ein Geradenprodukt.

Dies liegt vor allem daran, daß sich beide oben erwähnten Eigenschaften auf gröbere lineare Topologien vererben.

Der folgende Satz zeigt, daß für sehr viele Eigenschaften die Vererbbarkeit auf gröbere lineare Topologien gleichbedeutend ist mit der Vererbbarkeit von $(L, \tau \cap L)$ und $(M, \tau \cap M)$ auf (X, τ) .

1.1.1 Satz:

a) E vererbe sich von zwei Faktoren auf ihr Produkt; ferner existiere ein topologischer linearer Raum $(X, \tau) = L \dot{+} M$, $L = \overline{L}$, $M = \overline{M}$, derart daß $(L, \tau \cap L)$ und $(M, \tau \cap M)$ E besitzen, aber (X, τ) nicht.

Dann gibt es einen $\mathbb{K}$ -linearen Raum Y und lineare separierte Topologien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{R}$ auf Y mit $\mathcal{T} \supset \mathcal{R}$ so, daß $(Y, \mathcal{T})$ E besitzt, aber $(Y, \mathcal{R})$ nicht.

b) E vererbt sich von einem separierten endlichen Produkt auf jeden Faktor; ferner existiere ein $\mathbb{K}$ -linearer Raum Y und lineare separierte Topologien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{R}$ auf Y mit $\mathcal{T} \supset \mathcal{R}$ so, daß $(Y, \mathcal{T})$ E besitzt, aber $(Y, \mathcal{R})$ nicht.

Dann gibt es einen topologischen linearen Raum $(X, \mathcal{V}) = L \dot{+} M$, $L = \overline{L}$, $M = \overline{M}$, deart daß $(L, \mathcal{V} \cap L)$ und $(M, \mathcal{V} \cap M)$ E besitzen, aber $(X, \mathcal{V})$ nicht.

Beweis:

a) Wegen $\overline{\{0\}}^{\mathcal{T}} \subset L \cap M = \{0\}$ ist $\mathcal{V}$ separiert. Durch $\mathcal{R} := \mathcal{V}$ und $\mathcal{T} := (\mathcal{V} \cap L) \oplus (\mathcal{V} \cap M)$ sind daher lineare separierte Topologien auf $Y := X$ mit $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$ gegeben. $(Y, \mathcal{T})$ besitzt E , aber $(Y, \mathcal{R})$ nicht.

b) $(X, \mathcal{V}) := (Y \times Y, \mathcal{R} \times \mathcal{T})$ ist algebraisch direkte Summe von $L := \{0\} \times Y$ und $M := \Delta Y$. L ist $\mathcal{V}$ -abgeschlossen, da $\mathcal{R}$ separiert ist; M ist $\mathcal{V}$ -abgeschlossen, da der Quotient $((Y \times Y) / \Delta Y, \mathcal{V} / \Delta Y)$ topologisch isomorph zu dem separierten Raum $(Y, \mathcal{R})$ ist (Hilfssatz (5.1a)). $(L, \mathcal{V} \cap L)$ und $(M, \mathcal{V} \cap M)$ sind wegen Hilfssatz (5.1a) topologisch isomorph zu $(Y, \mathcal{T})$, besitzen also E ; $(X, \mathcal{V})$ besitzt E nicht, da $(Y, \mathcal{R})$ die Eigenschaft E nicht besitzt.

*/.

Anmerkung: Satz (1.1.1) bleibt offenbar richtig, wenn man stets "topologisch linear" durch "lokalkonvex" ersetzt.

Beispiele: Keine der Eigenschaften 1 - 24 aus O.2 vererbt sich von zwei algebraisch direkten abgeschlossenen Summanden auf den Ausgangsraum. Hierzu zeigen wir, daß für alle diese Eigenschaften die Voraussetzungen von Satz (1.1.1b) erfüllt sind.

Beweis: Nach O.2 vererben sich die Eigenschaften 1 - 24 von einem endlichen Produkt auf jeden Faktor.

Es sei nun Y ein abzählbar unendlich dimensionaler linearer Raum, $\mathcal{T}_1$ die feinste lokalkonvexe Topologie auf Y , $\mathcal{T}_2$ eine Prä-Hilbert-Raum-Topologie auf Y und $\mathcal{T}_3$ die zu $\mathcal{T}_2$ gehörige schwache Topologie $\sigma(Y, (Y, \mathcal{T}_2)')$. Es gilt: $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2 \supset \mathcal{T}_3$.

$(Y, \mathcal{T}_1)$ besitzt die Eigenschaften 1, 4 - 24: 1 ist klar, 9, 14, 18, 21, 24 folgen aus S. Saxon [26, Remark 1.3b], 20 gilt wegen $(Y^*, \beta(Y^*, Y)) \cong \mathbb{K}^{\text{IN}}_{\text{top}}$; die restlichen Eigenschaften er-

hält man mit Hilfe der Implikationsübersicht in O.2.

(Y, τ_2) ist als normierter unendlich dimensionaler Raum kein Schwartz-Raum, also auch nicht nuklear.

(Y, τ_3) ist offenbar kein Mackey-Raum; ferner ist (Y, τ_3) nicht lokalvollständig (wegen G.Köthe [13,p.213 und p.385] wäre sonst (Y, τ_2) vollständig) und nicht abzählbar quasitonneliert (die abgeschlossene Einheitskugel E des Hilbert-Raums

$Y' := (Y, \tau_2)' = (Y, \tau_3)'$ ist in der Normtopologie beschränkt und separabel, aber nicht gleichgradig stetig auf (Y, τ_3) . $E^0 \subset Y$ ist somit wegen M.De Wilde, C.Houet [7,p.257] eine bornivore ∞ -Tonne in (Y, τ_3) , aber keine τ_3 -Nullumgebung).

(Y, τ_3) besitzt also keine der Eigenschaften 2 - 19, 21, 22.

Damit erhält man:

Das Tripel (Y, τ_1, τ_3) erfüllt die Voraussetzungen von Satz (1.1.1b) für die Eigenschaften 4-19, 21, 22,

das Tripel (Y, τ_1, τ_2) für die Eigenschaften 23 und 24,

das Tripel (Y, τ_2, τ_3) für die Eigenschaften 2 und 3.

Es bleiben noch 1 = lokalkonvex und 20 = distinguert zu behandeln.

Da $l^p(\mathbb{N})$ für $p \in (0,1)$, versehen mit der kanonischen nicht lokalkonvexen metrischen linearen Topologie, separabel ist, kann man den abzählbar dimensional linearen Raum Y als dichten linearen Teilraum von $l^p(\mathbb{N})$ auffassen. Es gibt also auf Y eine nicht lokalkonvexe separierte lineare Topologie τ_4 . Da τ_1 die feinste lineare Topologie auf Y ist (N.Bourbaki [3,Ch.II,§ 4,ex.14]), gilt $\tau_1 \supset \tau_4$. Das Tripel (Y, τ_1, τ_4) erfüllt also die Voraussetzungen von Satz (1.1.1b) für die Eigenschaft lokalkonvex.

Schließlich sei $(Z, \mathcal{R})$ der von G.Köthe in [13,p.438/439] konstruierte nicht distinguerte Fréchet-Raum und τ die feinste lokalkonvexe Topologie auf Z . Da τ als feinste lokalkonvexe Topologie distinguert ist, erfüllt das Tripel $(Z, \tau, \mathcal{R})$ die Voraussetzungen von Satz (1.1.1b) für die Eigenschaft distinguert. $\cdot /$.

1.2 Es sei wieder E eine Eigenschaft topologischer linearer Räume, $(X, \mathcal{V})$ sei algebraisch direkte Summe der abgeschlossenen linearen Teilräume L und M . Wir betrachten die Vererbbarkeit der Eigenschaft E von $(X/L, \mathcal{V}/L)$ und $(X/M, \mathcal{V}/M)$ auf $(X, \mathcal{V})$. Besitzen X/L und X/M trennendes stetiges Dual, so auch X ; sind die beschränkten Teilmengen von X/L und X/M endlich dimen-

sional, so ist auch jede beschränkte Teilmenge von X endlich dimensional; die Abbildung $(q_M, q_L): X \longrightarrow (X/M) \times (X/L)$, $x \longmapsto (x+M, x+L)$, ist nämlich ein stetiger Isomorphismus, und diese beiden Eigenschaften vererben sich auf feinere lineare Topologien. Folgender Satz zeigt, daß für viele Eigenschaften die Vererbbarkeit auf feinere lineare Topologien mit der Vererbbarkeit von $(X/L, \mathcal{T}/L)$ und $(X/M, \mathcal{T}/M)$ auf $(X, \mathcal{T})$ gleichbedeutend ist.

1.2.1 Satz:

a) E vererbe sich von zwei Faktoren auf ihr Produkt; ferner existiere ein topologischer linearer Raum $(X, \mathcal{T}) = L \dot{+} M$, $L = \overline{L}$, $M = \overline{M}$, derart daß $(X/L, \mathcal{T}/L)$ und $(X/M, \mathcal{T}/M)$ E besitzen, aber $(X, \mathcal{T})$ nicht.

Dann gibt es einen $\mathbb{K}$ -linearen Raum Y und lineare separierte Topologien $\mathcal{S}$ und $\mathcal{R}$ auf Y mit $\mathcal{S} \supset \mathcal{R}$ so, daß $(Y, \mathcal{R})$ E besitzt, aber $(Y, \mathcal{S})$ nicht.

b) E vererbe sich von einem separierten endlichen Produkt auf jeden Faktor; ferner existiere ein $\mathbb{K}$ -linearer Raum Y und lineare separierte Topologien $\mathcal{S}$ und $\mathcal{R}$ auf Y mit $\mathcal{S} \supset \mathcal{R}$ so, daß $(Y, \mathcal{R})$ E besitzt, aber $(Y, \mathcal{S})$ nicht.

Dann gibt es einen topologischen linearen Raum $(X, \mathcal{T}) = L \dot{+} M$, $L = \overline{L}$, $M = \overline{M}$, derart daß $(X/L, \mathcal{T}/L)$ und $(X/M, \mathcal{T}/M)$ E besitzen, aber $(X, \mathcal{T})$ nicht.

Beweis:

a) Die Abbildung $(q_M, q_L): X \longrightarrow (X/M) \times (X/L)$, $x \longmapsto (x+M, x+L)$ ($x \in X$), ist ein stetiger Isomorphismus von $(X, \mathcal{T})$ auf den separierten topologischen linearen Raum $((X/M) \times (X/L), (\mathcal{T}/M) \times (\mathcal{T}/L))$, der offenbar E besitzt. Folglich ist die Initialtopologie $\mathcal{R}$ auf $Y := X$ bezüglich (q_M, q_L) eine lineare separierte Topologie, die gröber als $\mathcal{S} := \mathcal{T}$ ist. $(Y, \mathcal{R})$ besitzt E , aber $(Y, \mathcal{S})$ nicht.

b) $(X, \mathcal{T}) := (Y \times Y, \mathcal{R} \times \mathcal{S})$ ist algebraisch direkte Summe von $L := \{0\} \times Y$ und $M := \Delta Y$. L ist $\mathcal{T}$ -abgeschlossen, da $\mathcal{R}$ separiert ist; M ist $\mathcal{T}$ -abgeschlossen, da der Quotient $((Y \times Y)/\Delta Y, \mathcal{T}/\Delta Y)$ topologisch isomorph zu dem separierten Raum $(Y, \mathcal{R})$ ist (Hilfssatz (5.1a)). Da die Quotienten $(X/L, \mathcal{T}/L)$ und $(X/M, \mathcal{T}/M)$ topologisch isomorph zu $(Y, \mathcal{R})$ sind, besitzen sie E ; $(X, \mathcal{T})$ besitzt E nicht, da $(Y, \mathcal{S})$ E nicht besitzt. $\cdot/\cdot$.

Anmerkung: Satz (1.2.1) bleibt offenbar richtig, wenn man stets "topologisch linear" durch "lokalkonvex" ersetzt.

Beispiele: keine der Eigenschaften 1 - 24 aus 0.2 vererbt sich von den Quotienten nach zwei abgeschlossenen algebraisch direkten Summanden auf den Ausgangsraum. Hierzu zeigen wir, daß für alle diese Eigenschaften die Voraussetzungen von Satz (1.2.1b) erfüllt sind.

Beweis: Nach 0.2 vererben sich die Eigenschaften 1 - 24 von einem endlichen Produkt auf jeden Faktor.

Es sei (Y, τ_1) ein unendlich dimensionaler separabler Hilbert-Raum, H eine Hyperebene in Y^* mit $H \supset (Y, \tau_1)'$ und $\tau_2 := \tau(Y, H)$. Offenbar gilt: $\tau_1 \subset \tau_2$.

Bekanntlich besitzt (Y, τ_1) als Hilbert-Raum die Eigenschaften 1 - 17, 20 - 22.

Wir zeigen, daß (Y, τ_2) nicht abzählbar quasitonneliert ist.

Da $\dim Y \leq \text{card}(\mathbb{R})$, ist wegen G.Köthe [13, p.395] das Geradenprodukt $(Y^*, \mathfrak{G}(Y^*, Y))$ bornologisch; H ist als dichte Hyperebene in Y^* somit lokaldicht in Y^* (G.W.Mackey [17, p.177, Thm. IV 3]).

Es gibt also insbesondere eine $\mathfrak{G}(H, Y)$ -Cauchy-Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in H , die keinen Limes in H besitzt. Da $(H, \mathfrak{G}(H, Y))$ tonneliert ist (J.Dieudonné [5, p.51]), ist $\overline{\{f_n: n \in \mathbb{N}\}}^H$ eine $\beta(H, Y)$ -beschränkte Teilmenge von H . Somit ist

$\{y_n: n \in \mathbb{N}\}^0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{y_n\}^0$ eine bornivore $\mathfrak{G}$ -Tonne in

$(Y, \tau(Y, H))$, die keine Nullumgebung ist. Mit Hilfe der Implikationsübersicht in 0.2 erhält man: (Y, τ_2) besitzt keine der Eigenschaften 2 - 9, 16, 18, 21.

(Y, τ_2) ist auch kein Schwartz-Raum, denn auf einem unendlich dimensionalen Schwartz-Raum kann es keine gröbere tonnelierte Normtopologie geben, wie man aus der Definition von Schwartz-Raum unmittelbar ersieht.

$\tau_3 := \mathfrak{G}(Y, H)$ ist schließlich als schwache Topologie nuklear (A.Pietsch [18, p.80 und 76]).

Das Tripel (Y, τ_2, τ_1) erfüllt also die Voraussetzungen von Satz (1.2.1b) für die Eigenschaften 2 - 9, 16, 21,

das Tripel (Y, τ_2, τ_3) für 23 und 24.

Es sei jetzt $(Z, \mathcal{R}_1)$ das Geradenprodukt $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, H eine dichte Hyperebene in Z , $f \in Z \setminus H$ und $\mathcal{R}_2 := (\mathcal{R}_1 \cap H) \oplus (\mathcal{R}_1 \cap [f])$.

$(Z, \mathcal{R}_1)$ ist bekanntlich ein B -vollständiger Montel-Raum;

$(H, \mathcal{R}_1 \cap H)$ ist als dichte Hyperebene eines metrisierbaren lokal-konvexen Raums nicht lokalvollständig. Damit ist auch $(Z, \mathcal{R}_2)$ nicht lokalvollständig.

$\mathcal{R}_3 := \sigma(Z, Z^*)$ ist keine Mackey-Topologie, da Z unendlich dimensional ist. Man hat: $\mathcal{R}_3 \supset \mathcal{R}_2 \supset \mathcal{R}_1$, denn $\mathcal{R}_2$ und $\mathcal{R}_1$ sind schwache Topologien.

Das Tripel $(Z, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz (1.2.1b) für die Eigenschaften 10 - 19, das Tripel $(Z, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_1)$ für die Eigenschaft 22.

Die feinste lineare Topologie auf einem überabzählbar dimensionalen $\mathbb{K}$ -linearen Raum ist echt feiner als die feinste lokalkonvexe (N.Bourbaki [3, Ch. II, § 4, ex. 15]). Damit ist die Eigenschaft 1 belegt.

Es bleibt noch, 20 = distinguert zu behandeln.

Sei hierzu (Z, σ) der bereits auf Seite 15 erwähnte nicht distinguerte Fréchet-Raum ([13, p. 438/439]). Aus loc. cit., p. 422 ff und p. 438 kann man ablesen, daß der gestufte Raum (Z, σ) stetige Normen besitzt. Es existiert also eine Normtopologie $\mathcal{R}$ auf Z mit $\mathcal{R} \subset \sigma$. $(Z, \mathcal{R})$ ist als normierter Raum trivialerweise distinguert. $\cdot/\cdot$

Anmerkung: Bildet man mit (Y, τ_1) und (Y, τ_2) aus vorigen Beispielen wie im Beweis von Satz (1.2.1b) den Mackey-Raum $(X, \tau) := (Y \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ (G.Köthe [13, p. 289]), so ist (X, τ) nicht abzählbar quasitonneliert; ferner ist X algebraisch direkte Summe von $L := \{0\} \times Y$ und $M := \Delta Y$.

Hilfssatz (5.1b) impliziert: $(X, \tau) = Y \times \{0\} \oplus \Delta Y$.

Hieraus folgt mit G.Köthe [13, p. 289] und der Tonneliertheit von (Y, τ_1) :

$$\begin{aligned} (X, \beta(X, X')) &= (Y, \tau_1) \times \{0\} \oplus (\Delta Y, \beta(X, X') \cap \Delta Y) \\ &= (Y, \tau_1) \times \{0\} \oplus \{0\} \times (Y, \beta(Y, (Y, \tau_2)')) \end{aligned}$$

Damit hat man: $\beta(X, X')/L = \tau(X, X')/L$ und $\beta(X, X')/M = \tau(X, X')/M$. Diese Bedingung ist wegen

$$\beta(X/L, (X/L)') \subset \beta(X, X')/L = \tau(X, X')/L = \tau(X/L, (X/L)') \subset$$

[13, p. 281] [13, p. 280]

$\subset \beta(X/L, (X/L)')$ (und der analogen Aussage für M) schärfer als die Tonneliertheit von X/L und X/M .

1.3 Es sei wieder E eine Eigenschaft topologischer linearer Räume; der topologische Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ sei algebraisch direkte Summe zweier abgeschlossener linearer Teilräume L und M . Wir betrachten die Vererbbarkeit der Eigenschaft E von $(X, \mathcal{T})$ auf $(L, \mathcal{T} \cap L)$ und $(M, \mathcal{T} \cap M)$.

Ist $(X, \mathcal{T})$ lokalkonvexer induktiver Limes einer Folge von Fréchet-Räumen, so besitzen $(L, \mathcal{T} \cap L)$ und $(M, \mathcal{T} \cap M)$ dieselbe Eigenschaft.

Beweis (W. Roelcke):

Die Abbildung $(q_L, q_M): (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X/L, \mathcal{T}/L) \times (X/M, \mathcal{T}/M)$, $x \longmapsto (x+L, x+M)$ ($x \in X$) ist ein stetiger Isomorphismus von einem lokalkonvexen induktiven Limes einer Folge B -vollständiger Räume auf einen separierten ultrabornologischen Raum, der auf Grund von Satz 2 in A. Robertson, W. Robertson [21, p. 11] topologisch ist. $(X, \mathcal{T})$ ist folglich topologisch direkte Summe von L und M , und damit sind L und M lokalkonvexe induktive Limiten einer Folge von Fréchet-Räumen. $\cdot/\cdot$

Die Eigenschaft, lokalkonvexer induktiver Limes einer Folge von Fréchet-Räumen zu sein, vererbt sich jedoch nicht auf abgeschlossene lineare Teilräume, wie das Gegenbeispiel von G. Köthe in [13, p. 436/437] zeigt. Dort wird ein Fréchet-Montel-Raum konstruiert, dessen starkes Dual, das offenbar lokalkonvexer induktiver Limes einer Folge von Banach-Räumen ist, einen abgeschlossenen nicht tonnelierten linearen Teilraum besitzt.

Folgender Satz charakterisiert die Vererbbarkeit einer Eigenschaft E von $(X, \mathcal{T})$ auf $(L, \mathcal{T} \cap L)$ und $(M, \mathcal{T} \cap M)$.

1.3.1 Satz: Es sei E eine Eigenschaft topologischer linearer Räume, die sich von einem endlichen Produkt auf jeden Faktor und umgekehrt vererbt. Dann sind äquivalent:

- Es gibt einen separierten topologischen linearen Raum $(X, \mathcal{T}) = L \dot{+} M$, $L = \bar{L}$, derart daß $(X, \mathcal{T})$ und $(M, \mathcal{T} \cap M)$ E besitzen, aber $(L, \mathcal{T} \cap L)$ nicht.
- Es gibt einen topologischen linearen Raum $(X_1, \mathcal{T}_1) = L_1 \dot{+} M_1$, $\bar{L}_1 = L_1 \cong M_1 = \bar{M}_1$, derart daß $(X_1, \mathcal{T}_1)$ E besitzt, aber $(L_1, \mathcal{T}_1 \cap L_1)$ und $(M_1, \mathcal{T}_1 \cap M_1)$ nicht.
- Es gibt einen topologischen linearen Raum $(X_2, \mathcal{T}_2) = L_2 \dot{+} M_2$, $\bar{L}_2 = L_2$, $\bar{M}_2 = M_2$, derart daß $(X_2, \mathcal{T}_2)$ und $(M_2, \mathcal{T}_2 \cap M_2)$ E besitzen, aber $(L_2, \mathcal{T}_2 \cap L_2)$ nicht.

Beweis:

a) $\implies$ b) : Es sei $Y := (X \times X) / \Delta L$, $\mathcal{Y} := (\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}) / \Delta L$.

Y ist algebraisch direkte Summe der drei linearen Teilräume

$$N_1 := (M \times \{0\} + \Delta L) / \Delta L, \quad N_2 := (L \times L) / \Delta L, \quad N_3 := (\{0\} \times M + \Delta L) / \Delta L,$$

denn $X \times X = M \times \{0\} + \{0\} \times M + L \times L$.

Ferner ist $(Y, \mathcal{T})$ separiert, da ΔL in $X \times X$ abgeschlossen ist.

Wir definieren nun lineare separierte Topologien $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ auf Y durch

$$(Y, \mathcal{R}_1) := (N_1 + N_2, \mathcal{T} \cap (N_1 + N_2)) \oplus (N_3, \mathcal{T} \cap N_3),$$

$$(Y, \mathcal{R}_2) := (N_1, \mathcal{T} \cap N_1) \oplus (N_2 + N_3, \mathcal{T} \cap (N_2 + N_3)),$$

d.h. $\mathcal{R}_1$ ist die Topologie der direkten Summe auf Y aus $\mathcal{T} \cap (N_1 + N_2)$ und $\mathcal{T} \cap N_3$, $\mathcal{R}_2$ die Topologie der direkten Summe aus $\mathcal{T} \cap N_1$ und $\mathcal{T} \cap (N_2 + N_3)$.

$N_1 + N_2$ und $N_2 + N_3$ sind wegen $X \times L = (X \times \{0\}) \oplus \Delta L$ und $L \times X = (\{0\} \times X) \oplus \Delta L$ (Hilfssatz (5.1b)) topologisch isomorph zu $(X, \mathcal{Y})$, N_1 und N_3 sind aus demselben Grund topologisch isomorph zu $(M, \mathcal{Y} \cap M)$.

Folglich besitzen $(Y, \mathcal{R}_1)$, $(Y, \mathcal{R}_2)$ und auch das Produkt $(X_1, \mathcal{Y}_1) := (Y \times Y, \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2)$ die Eigenschaft E.

X_1 ist algebraisch direkte Summe von $L_1 := \Delta Y$ und $M_1 := \Delta_{-Y}$, die wegen Hilfssatz (5.1a) topologisch isomorph sind.

L_1 und M_1 sind $\mathcal{Y}_1$ -abgeschlossen in X_1 , denn die Quotienten X_1/L_1 und X_1/M_1 sind wegen Hilfssatz (5.1a) topologisch isomorph zu $(Y, \mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2)$. Dieser Raum ist aber wegen $\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2 \supset \mathcal{T}$ separiert. Ferner sind wegen Hilfssatz (5.1a) die Teilräume L_1 und M_1 topologisch isomorph zu $(Y, \mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2)$.

Wir zeigen, daß $(Y, \mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2)$ die Eigenschaft E nicht besitzt.

$(Y, \mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2)$ ist topologisch isomorph zu der direkten Summe $(N_1, \mathcal{T} \cap N_1) \oplus (N_2, \mathcal{T} \cap N_2) \oplus (N_3, \mathcal{T} \cap N_3)$, denn für jede $\mathcal{T}$ -Nullumgebung U in Y gilt:

$$\begin{aligned} & (U \cap N_1) + (U \cap N_2) + (U \cap N_3) \subset \\ & ((U+U) \cap (N_1+N_2) + U \cap N_3) \cap (U \cap N_1 + (U+U) \cap (N_2+N_3)), \\ & (U \cap (N_1+N_2) + U \cap N_3) \cap (U \cap N_1 + U \cap (N_2+N_3)) \subset \\ & (U \cap N_1) + (U - U) \cap N_2 + U \cap N_3. \end{aligned}$$

Da $(N_2, \mathcal{T} \cap N_2) = ((L \times L) / \Delta L, ((\mathcal{T} \cap L) \times (\mathcal{T} \cap L)) / \Delta L)$ topologisch isomorph zu $(L, \mathcal{T} \cap L)$ ist, der nach Voraussetzung E nicht besitzt, besitzt auch $(Y, \mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2)$ die Eigenschaft E nicht.

b) $\implies$ c) : Der topologische lineare Raum

$(X_2, \mathcal{T}_2) := (X_1 \times X_1, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1)$ besitzt die Eigenschaft E, da $(X_1, \mathcal{T}_1)$ E besitzt.

$(X_2, \mathcal{T}_2)$ ist algebraisch direkte Summe der linearen Teilräume $L_2 := L_1 \times M_1$ und $M_2 := \Delta X_1$; L_2 ist als Produkt abgeschlossener Teilräume abgeschlossen, M_2 ist ebenfalls abgeschlossen, da der Quotient X_2/M_2 wegen Hilfssatz (5.1a) topologisch isomorph zu dem separierten Raum $(X_1, \mathcal{T}_1)$ ist (die Separiertheit von $(X_1, \mathcal{T}_1)$ folgt aus $\overline{\{0\}}^{\mathcal{T}_1} \subset L_1 \cap M_1 = \{0\}$).

M_2 ist wegen Hilfssatz (5.1a) topologisch isomorph zu $(X_1, \mathcal{T}_1)$, besitzt also E; L_2 besitzt E nicht, da L_1 E nicht besitzt.

c) $\implies$ a) : Diese Implikation ist klar, denn $(X_2, \mathcal{T}_2)$ ist wegen $\overline{\{0\}}^{\mathcal{T}_2} \subset L_2 \cap M_2 = \{0\}$ separiert. $\cdot/\cdot$

Anmerkung: Satz (1.3.1) bleibt offenbar richtig, wenn man stets "topologisch linear" durch "lokalkonvex" ersetzt.

Bevor wir Satz (1.3.4) auf den Katalog von Eigenschaften in 0.2 anwenden, benötigen wir zunächst folgendes allgemeine Lemma, das auch in späteren Paragraphen Anwendung finden wird.

1.3.2 Lemma: Es sei I eine Indexmenge, $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie IK-linearer Räume, $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}_i$ separierte lokalkonvexe Topologien auf X_i ($i \in I$), $X := \bigoplus_{i \in I} X_i$ die (algebraisch) direkte Summe

der linearen Räume X_i . Für $J \subset I$ sei die lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}_J$ auf X durch

$$(X, \mathcal{T}_J) := \left(\bigoplus_{i \in J} X_i, \bigoplus_{i \in J} \mathcal{T}_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in I \setminus J} X_i, \bigoplus_{i \in I \setminus J} \mathcal{T}_i \right) \text{ definiert.}$$

Dann gilt: Ist $\mathcal{T}_i \neq \mathcal{T}_i$ für unendlich viele $i \in I$, so ist

$\mathcal{R} := \bigvee_{J \subset I \text{ endlich}} \mathcal{T}_J$ eine nicht abzählbar quasitonnelierte Topologie auf X.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine abzählbar unendliche Teilmenge $J = \{i_n: n \in \mathbb{N}\}$ in I mit $\tau_{i_n} \neq \gamma_{i_n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Folglich existiert zu $n \in \mathbb{N}$ eine τ_{i_n} -abgeschlossene absolutkonvexe τ_{i_n} -Nullumgebung U_n in X_{i_n} , die keine γ_{i_n} -Nullumgebung ist.

Für $i \in I$ bezeichne $j_i: X_i \rightarrow X$ die kanonische Injektion. Für $n \in \mathbb{N}$ ist dann

$$V_n := \sum_{1 \leq v \leq n} j_{i_v}(U_v) + \sum_{i \in I \setminus \{i_1, \dots, i_n\}} j_i(X_i)$$

eine abgeschlossene absolutkonvexe Nullumgebung in $(X, \mathcal{R})$, denn V_n ist abgeschlossene Nullumgebung in $(X, \gamma_{\{i_1, \dots, i_n\}})$.

$V := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ ist bornivor in $(X, \mathcal{R})$. Jede $\mathcal{R}$ -beschränkte Teilmenge B von X ist nämlich γ_J -beschränkt für alle $J \subset I$ endlich; wegen der Separiertheit der γ_i ($i \in I$) ist B in einer endlichen Summe $\bigoplus_{i \in J_1} X_i$ enthalten (G.Köthe [13, p.216]), wird also von V absorbiert.

V ist also eine bornivore σ -Tonne in $(X, \mathcal{R})$.

Wir zeigen, daß V keine $\mathcal{R}$ -Nullumgebung ist. Damit ist dann das Lemma bewiesen.

Zu jeder $\mathcal{R}$ -Nullumgebung W existiert $J_0 \subset I$ endlich, so daß W eine γ_{J_0} -Nullumgebung ist.

$V \cap j_{i_v}(X_{i_v})$ ist keine γ_{i_v} -Nullumgebung für alle $v \in \mathbb{N}$.

Gemäß G.Köthe [13, p.232] gibt es also keine endliche Teilmenge J_0 von I derart, daß V eine γ_{J_0} -Nullumgebung ist. $\cdot/\cdot$

Anmerkung: Man kann zeigen, daß $(X, \mathcal{R})$ ein Mackey-Raum ist, wenn γ_i und τ_i ($i \in I$) Mackey-Topologien sind. Dies soll aber hier nicht bewiesen werden, da es im Folgenden nicht benötigt wird.

Beispiele zu Satz (1.3.1):

Eigenschaften E, die eine der Bedingungen a), b), c) von Satz (1.3.1) (und damit alle) erfüllen, vererben sich offenbar nicht auf abgeschlossene lineare Teilräume. Die Eigenschaften 1 - 3, 10 - 15, 17, 19, 23, 24 aus 0.2 erfüllen also keine dieser Bedingungen.

Wir zeigen, daß alle anderen Eigenschaften aus 0.2, also

4 - 9, 16, 18, 20 - 22, eine der Bedingungen a), b), c) erfüllen.

Beweis: Nach 0.2 vererben sich diese Eigenschaften von einem endlichen Produkt auf jeden Faktor und umgekehrt.

Es sei jetzt (Y, τ) ein unendlich dimensionaler Fréchet-Montel-Raum (etwa das Geradenprodukt $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$) und σ die feinste lokal-konvexe Topologie auf Y . Dann gilt $\tau \subsetneq \sigma$.

Wir setzen in Lemma (1.3.2):

$$I := \mathbb{N}, X_n := Y, \tau_n := \sigma, \gamma_n := \tau \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\gamma_n := \tau_{\{1, \dots, n\}} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad X := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n.$$

(X, γ_n) besitzt die Eigenschaften 4 - 9, 16, 18, denn (Y, τ) und (Y, σ) besitzen sie und diese Eigenschaften vererben sich auf abzählbare lokalkonvexe direkte Summen (für 16 und 18 siehe G.Köthe [13, p.306 und 373]). Damit besitzt auch der lokalkonvexe

Raum $(Z, \mathcal{R}_0) := \prod_{n \in \mathbb{N}} (X, \gamma_n)$ alle diese Eigenschaften, denn

$(Z, \mathcal{R}_0)$ ist als abzählbares Produkt vollständiger bornologischer Montelräume selbst ein vollständiger bornologischer Montel-Raum (G.Köthe [13, p.387 und p.373]), besitzt also die Eigenschaften 4 - 9, 16, 18. (Hierbei wird benutzt, daß ein lokalvollständiger bornologischer Raum ultrabornologisch ist (N.Bourbaki [3, Ch.III, § 3, ex.11])).

Z ist algebraisch direkte Summe der linearen Teilräume

$$L := \{(x)_{n \in \mathbb{N}} : x \in X\} \quad \text{und} \quad M := \prod_{n \geq 2} (X, \gamma_n).$$

M ist offenbar $\mathcal{R}_0$ -abgeschlossen und besitzt aus denselben Gründen wie Z die Eigenschaften 4 - 9, 16, 18.

L ist ebenfalls $\mathcal{R}_0$ -abgeschlossen, da alle Topologien γ_n separiert sind und $\gamma_{n+1} \supset \gamma_n$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt.

Der algebraische Isomorphismus

$$\psi: (L, \mathcal{R}_0 \cap L) \longrightarrow (X, \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n), \quad (x)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto x \quad (x \in X)$$

ist topologisch

(ψ ist stetig, denn $\psi: (L, \mathcal{R}_0 \cap L) \longrightarrow (X, \gamma_n)$ ist als Einschränkung einer Projektionsabbildung stetig für alle $n \in \mathbb{N}$;

ψ^{-1} ist stetig, denn $\text{pr}_n \circ \psi^{-1}: (X, \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n) \longrightarrow (X, \gamma_n)$ ist ste-

tig für alle $n \in \mathbb{N}$, und L trägt die Initialtopologie bezüglich $(\text{pr}_n|_L: L \longrightarrow (X, \gamma_n))_{n \in \mathbb{N}}$).

In Lemma (1.3.2) wurde bewiesen, daß $(X, \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n)$ nicht abzählbar quasitonneliert ist. Folglich ist auch $(L, \mathcal{R}_0 \cap L)$ nicht abzählbar quasitonneliert, besitzt also keine der Eigenschaften 4 - 9, 16, 18. Damit ist gezeigt, daß das Tripel $((Z, \mathcal{R}_0), L, M)$ die Bedingung c) von Satz (1.3.1) für die Eigenschaften 4 - 9, 16, 18 erfüllt.

Es sei wieder $(Z, \mathcal{T})$ der schon in 1.1 und 1.2 erwähnte nicht distinguierte Fréchet-Raum aus G. Köthe [13, p. 438/439], dessen Topologie durch eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Normen auf Z mit $p_n \leq p_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) gegeben ist. Die Abbildung

$$\gamma: (Z, \mathcal{T}) \longrightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} (Z, p_n), \quad z \longmapsto (z)_{n \in \mathbb{N}} \quad (z \in Z)$$

ist folglich ein topologischer Isomorphismus von Z auf den linearen Teilraum $L := \{(z)_{n \in \mathbb{N}} : z \in Z\}$ des Produkts $\prod_{n \in \mathbb{N}} (Z, p_n)$ (W. Roelcke [24, Satz 17.2(a)]).

L ist also nicht distinguiert und offenbar abgeschlossener linearer Teilraum von $\prod_{n \in \mathbb{N}} (Z, p_n)$, der $M := \prod_{n \geq 2} (Z, p_n)$ als abgeschlossenen algebraischen Komplementärraum besitzt. $\prod_{n \in \mathbb{N}} (Z, p_n)$ und

M sind beide als Produkte normierter Räume distinguiert (normierte Räume sind distinguiert, da ihr starkes Dual als Banach-Raum tonneliert ist; Produkte distinguiertter Räume sind nach G. Köthe [13, p. 290] wieder distinguiert).

Das Tripel $((Z, \mathcal{T}), L, M)$ erfüllt somit die Bedingung c) von Satz (1.3.1) für die Eigenschaft 20 = distinguiert.

M. Valdivia hat in [30, Beispiel 2] einen separierten quasitonnelierten DF-Raum $(X, \mathcal{T})$ konstruiert, der einen abgeschlossenen, abzählbar unendlich kodimensionalen linearen Teilraum L besitzt, welcher in seiner Relativtopologie nicht abzählbar quasitonneliert ist. Es sei $q: X \longrightarrow X/L$ die Quotientenabbildung, $\mathcal{T}$ die feinste lokalkonvexe Topologie auf $Y := X/L$.

Der lokalkonvexe Raum $(Z, \mathcal{R}) := (X, \mathcal{T}) \times (Y, \mathcal{T})$ ist dann ein separierter quasitonnelierter DF-Raum, denn die feinste lokalkonvexe Topologie auf einem abzählbar dimensional linearen Raum ist eine tonnelierte DF-Raum-Topologie (S. Saxon [26, Remark 1.3b]).

$(Z, \mathcal{R})$ ist algebraisch direkte Summe der beiden linearen Teilräume $M := \{x, q(x) : x \in X\}$ und $N := \{0\} \times Y$.

Da $q: (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X/L, \mathcal{T}/L)$ stetig ist und $\mathcal{T}/L$ separiert ist, ist M bezüglich der Topologie $\mathcal{T} \times (\mathcal{T}/L)$ auf $X \times Y$ abgeschlossen und folglich auch bezüglich der feineren Topologie $\mathcal{R} = \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ abgeschlossen. N ist trivialerweise in $(Z, \mathcal{R})$ abgeschlossen; $(N, \mathcal{R} \cap N)$ ist offenbar ein tonnelierter DF-Raum.

Wir zeigen, daß $(M, \mathcal{R} \cap M)$ kein DF-Raum ist.

Sei hierzu $\mathcal{F}$ die Initialtopologie auf X bezüglich $\text{id}_X: X \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ und $q: X \longrightarrow (X/L, \mathcal{T})$.

$(X, \mathcal{F})$ ist dann topologisch direkte Summe von $(L, \mathcal{T} \cap L)$ und einem algebraischen Komplementärraum L_1 von L in X , der die feinste lokalkonvexe Topologie trägt. Da $(L, \mathcal{T} \cap L)$ nach Voraussetzung kein DF-Raum ist, ist folglich $(X, \mathcal{F})$ auch kein DF-Raum.

$\varphi: (M, \mathcal{R} \cap M) \longrightarrow (X, \mathcal{F})$, $(x, q(x)) \longrightarrow x$ ($x \in X$) ist ein topologischer Isomorphismus

(φ ist stetig, denn $\text{id}_X \circ \varphi = \text{pr}_1|_M : M \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ und $q \circ \varphi = \text{pr}_2|_M : M \longrightarrow (X/L, \mathcal{T})$ sind stetig;

φ^{-1} ist stetig, denn $\text{pr}_1 \circ \varphi^{-1} = \text{id}_X: (X, \mathcal{F}) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ und $\text{pr}_2 \circ \varphi^{-1} = q: (X, \mathcal{F}) \longrightarrow (X/L, \mathcal{T})$ sind stetig),

also ist auch $(M, \mathcal{R} \cap M)$ kein DF-Raum.

Das Tripel $((Z, \mathcal{R}), M, N)$ erfüllt somit die Bedingung c) von Satz (1.3.1) für die Eigenschaft $21 = \text{DF-Raum}$.

Es sei schließlich $K := [-1, +1]^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $Y := [K]$, versehen mit der von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ induzierten Topologie. (Offenbar ist $Y = l^\infty(\mathbb{N})$ und K die abgeschlossene Einheitskugel in $l^\infty(\mathbb{N})$.) Ferner sei L ein abzählbar unendlich kodimensionaler dichter linearer Teilraum von Y und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Kobasis von L in Y . Für $n \in \mathbb{N}$ sei $L_n := L + [y_m: 1 \leq m \leq n]$ und $\mathcal{T}_n := \tau(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, L_n)$ die Mackey-Topologie auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ bezüglich der kanonischen Bilinearform $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times L_n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Die Mackey-Topologien $\mathcal{T}_n$ auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ sind separiert, und es gilt $\mathcal{T}_{n+1} \supset \mathcal{T}_n$ ($n \in \mathbb{N}$), da $L_{n+1} \supset L_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Die obere Grenze $\mathcal{T} := \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ist keine Mackey-Topologie, wie folgende Überlegungen zeigen:

Da $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ gilt, hat man $\tau(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, Y) \supset \mathcal{T} \supset \sigma(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, Y)$;

K ist eine $\sigma(Y, \mathbb{R}^{(\mathbb{N})})$ -kompakte absolutkonvexe Teilmenge von

$Y (= (\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \gamma)')$, folglich ist K^0 eine $\tau(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, Y)$ -Nullumgebung in $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$; K^0 ist aber keine γ -Nullumgebung, denn K ist in keinem der Räume L_n ($n \in \mathbb{N}$) enthalten.

Da für $n \in \mathbb{N}$ der lokalkonvexe Raum $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \gamma_n)$ ein Mackey-Raum ist, sind auch die Produkte

$Z := \prod_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \gamma_n)$ und $N := \prod_{n \geq 2} (\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \gamma_n)$ Mackey-Räume (G.Köthe [13, p.287]).

$M := \{(x)_{n \in \mathbb{N}} \in Z : x \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}\}$ ist abgeschlossener linearer Teilraum von Z , der topologisch isomorph zu $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \gamma)$ ist und folglich kein Mackey-Raum ist.

Z ist algebraisch direkte Summe von M und N .

Das Tripel (Z, M, N) erfüllt die Bedingung c) von Satz (1.3.1) für die Eigenschaft $22 = \text{Mackey-Raum}$. $\bullet/\bullet$.

1.4 Es sei wieder E eine Eigenschaft topologischer linearer Räume; der topologische Vektorraum (X, γ) sei algebraisch direkte Summe zweier abgeschlossener linearer Teilräume L und M . Wir betrachten die Vererbbarkeit der Eigenschaft E von (X, γ) auf $(X/L, \gamma/L)$ und $(X/M, \gamma/M)$.

Ist (X, γ) vollständiger lokalkonvexer induktiver Limes einer Folge von Fréchet-Räumen, so sind $(X/L, \gamma/L)$ und $(X/M, \gamma/M)$ ebenfalls vollständige lokalkonvexe induktive Limiten von Folgen von Fréchet-Räumen. Am Anfang von 1.3 wurde nämlich gezeigt, daß in dieser Situation (X, γ) bereits die topologisch direkte Summe von L und M ist.

Die Eigenschaft, vollständiger lokalkonvexer induktiver Limes einer Folge von Fréchet-Räumen zu sein, vererbt sich jedoch nicht auf Quotienten, wie das Beispiel eines unvollständiger LB-Raums von G. Köthe [13a, p.434] zeigt. Der dort konstruierte separierte unvollständige lokalkonvexe Raum ist Quotient einer abzählbaren direkten Summe von Banach-Räumen.

Folgender Satz charakterisiert die Vererbbarkeit einer Eigenschaft E von (X, γ) auf $(X/L, \gamma/L)$ und $(X/M, \gamma/M)$.

1.4.1 Satz: Es sei E eine Eigenschaft topologischer linearer Räume, die sich von einem endlichen Produkt auf jeden Faktor und umgekehrt vererbt. Dann sind äquivalent:

- a) Es gibt einen separierten topologischen linearen Raum $(X, \mathcal{T}) = L \dot{+} M$ mit $L = \overline{L}$ und eine lineare Topologie $\mathcal{R}$ auf M mit $\mathcal{R} \supset \mathcal{T} \cap M$ derart, daß $(X, \mathcal{T})$ und $(M, \mathcal{R})$ E besitzen, aber $(X/L, \mathcal{T}/L)$ nicht.
- b) Es gibt einen topologischen linearen Raum $(X_1, \mathcal{T}_1) = L_1 \dot{+} M_1$, $\overline{L}_1 = L_1 \underset{\text{top}}{\cong} M_1 = \overline{M}_1$, derart daß $(X_1, \mathcal{T}_1)$ E besitzt, aber (X_1/L_1) und (X_1/M_1) nicht.
- c) Es gibt einen topologischen linearen Raum $(X_2, \mathcal{T}_2) = L_2 \dot{+} M_2$, $\overline{L}_2 = L_2$, $\overline{M}_2 = M_2$, derart daß $(X_2, \mathcal{T}_2)$ und $(X_2/M_2, \mathcal{T}_2/M_2)$ E besitzen, aber $(X_2/L_2, \mathcal{T}_2/L_2)$ nicht.

Beweis:

a) $\implies$ c) : Der separierte topologische lineare Raum $(X_2, \mathcal{T}_2) := (X \times M, \mathcal{T} \times \mathcal{R})$ besitzt die Eigenschaft E , da $(X, \mathcal{T})$ und $(M, \mathcal{R})$ sie besitzen. X_2 ist algebraisch direkte Summe der linearen Teilräume $L_2 := L \times M$ und $M_2 := \Delta M$ ($= \{(x, x) \in X \times M : x \in M\}$). L_2 ist abgeschlossen, da L $\mathcal{T}$ -abgeschlossen ist, $(X_2/L_2, \mathcal{T}_2/L_2) = ((X \times M)/(L \times M), (\mathcal{T} \times \mathcal{R})/(L \times M))$ ist topologisch isomorph zu $(X/L, \mathcal{T}/L)$, besitzt also die Eigenschaft E nicht.

Mit Hilfe von Hilfssatz (5.1b) sieht man leicht, daß $(X_2/M_2, \mathcal{T}_2/M_2)$ topologisch isomorph zu $(X, \mathcal{T})$ ist. Hieraus folgt, daß M_2 abgeschlossen in $(X_2, \mathcal{T}_2)$ ist und daß der Quotient X_2/M_2 die Eigenschaft E besitzt.

c) $\implies$ b) : Der topologische lineare Raum $(X_1, \mathcal{T}_1) := (X_2 \times X_2, \mathcal{T}_2 \times \mathcal{T}_2)$ ist algebraisch direkte Summe der beiden abgeschlossenen linearen Teilräume $L_1 := L_2 \times M_2$ und $M_1 := M_2 \times L_2$, die offenbar topologisch isomorph sind. $(X_1, \mathcal{T}_1)$ besitzt E , da $(X_2, \mathcal{T}_2)$ E besitzt. Die Quotienten X_1/L_1 und X_1/M_1 sind topologisch isomorph zu $(X_2/L_2) \times (X_2/M_2)$ bzw. $(X_2/M_2) \times (X_2/L_2)$, besitzen folglich beide die Eigenschaft E nicht (sie enthalten beide X_2/L_2 als topologisch direkten Summanden).

b) $\implies$ a) : Der topologische lineare Raum $(X, \mathcal{T}) := (X_1 \times X_1, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1)$ besitzt E und ist separiert, denn

$(X_1, \mathcal{T}_1)$ besitzt E und ist wegen $\overline{\{0\}}^{\mathcal{T}_1} \subset L_1 \cap M_1 = \{0\}$ separiert.

$(X, \mathcal{T})$ ist algebraisch direkte Summe der linearen Teilräume $L := L_1 \times M_1$ und $M := \Delta X_1$. Nach Hilfssatz (5.1a) ist M abgeschlossen, die Abgeschlossenheit von L ist offensichtlich.

Der Quotient $(X/L, \mathcal{T}/L) = ((X_1 \times X_1)/(L_1 \times M_1), (\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1)/(L_1 \times M_1))$ enthält X_1/L_1 als topologisch direkten Summanden, besitzt also E nicht, denn X_1/L_1 besitzt E nicht. $(\Delta X_1, \mathcal{T} \cap \Delta X_1)$ ist wegen Hilfssatz (5.1a) topologisch isomorph zu $(X_1, \mathcal{T}_1)$, besitzt also E. Setzt man $\mathcal{R} := \mathcal{T} \cap M$, so folgt a). $\cdot/\cdot$

Anmerkung: Satz (1.4.1) bleibt offenbar richtig, wenn man stets "topologisch linear" durch "lokalconvex" ersetzt.

Bevor wir Satz (1.4.1) auf den Katalog von Eigenschaften in 0.2 anwenden, ist es günstig, folgendes Lemma zur Verfügung zu haben.

1.4.2 Lemma: (Vgl. J.L.Kelley, I.Namioka [12a, p.195, problem D])

Es sei I eine nicht leere Indexmenge, $((Y_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}$ eine Familie separierter lokalconvexer Räume; für $i \in I$ sei X_i ein dichter linearer Teilraum von $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ und $\mathcal{T}_i$ eine lokalconvexe Topologie auf X_i mit $\mathcal{T}_i \supset \mathcal{T}_i \cap X_i$.

Ferner sei $(Y, \mathcal{R}) := \prod_{i \in I} (X_i, \mathcal{T}_i) \times \bigoplus_{i \in I} (Y_i, \mathcal{T}_i)$.

Dann ist $L := \{((x_i)_{i \in I}, (x_i)_{i \in I}) \in Y : x_i \in X_i \text{ } (i \in I)\}$

ein abgeschlossener linearer Teilraum in $(Y, \mathcal{R})$.

Ist $X_i \neq Y_i$ für unendlich viele $i \in I$, so ist der Quotient $(Y/L, \mathcal{R}/L)$ nicht lokalvollständig.

Beweis:

Es sei $Z := (\prod_{i \in I} X_i) + (\bigoplus_{i \in I} Y_i) \subset \prod_{i \in I} Y_i$ und $\mathcal{T} := (\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i) \cap Z$.

Der Homomorphismus $\varphi : (Y, \mathcal{R}) \longrightarrow (Z, \mathcal{T})$,

$$((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \longrightarrow (x_i - y_i)_{i \in I} \quad (x_i \in X_i, y_i \in Y_i, i \in I)$$

ist offenbar surjektiv, und der Kern von φ ist gleich dem linearen Teilraum L. Es bezeichne $\text{pr}_j : Z \rightarrow Y_j$ die kanonische Projektion ($j \in I$); wegen $\mathcal{T}_i \supset \mathcal{T}_i \cap X_i$ und der Stetigkeit der Subtraktion ist $\text{pr}_j \circ \varphi$ stetig für $j \in I$. Hieraus folgt die Stetigkeit von φ .

Wir zeigen, daß φ offen ist. Hierzu seien $u_i : X_i \longrightarrow \prod_{j \in I} X_j$, $v_i : Y_i \longrightarrow \bigoplus_{j \in I} Y_j$, $w_i : Y_i \longrightarrow \prod_{j \in I} Y_j$ die kanonischen Injek-

tionen.

Es sei V eine $\mathcal{K}$ -Nullumgebung in Y . Dann gibt es $J \subset I$ endlich, $V_i \in \mathcal{U}_0(X_i, \mathcal{T}_i)$ kreisförmig ($i \in J$) und $U_i \in \mathcal{U}_0(Y_i, \mathcal{T}_i)$ kreisförmig ($i \in I$) so, daß

$$V \supset \left(\sum_{i \in J} u_i(V_i) + \prod_{i \in I \setminus J} X_i \right) \times \prod_{i \in I} v_i(U_i).$$

$W := \left(\frac{1}{2} \prod_{i \in J} w_i(U_i) + \prod_{i \in I \setminus J} Y_i \right) \cap Z$ ist dann eine $\mathcal{T}$ -Nullumgebung in Z und es gilt: $W \subset \varphi(V)$.

Ist nämlich $z = (z_i)_{i \in I} \in W$, so gibt es $J_1 \subset I \setminus J$ endlich, $J_1 = \{i_1, \dots, i_N\}$, derart, daß $z_i \in X_i$ für $i \in I \setminus (J \cup J_1)$. Da X_i für $i \in I$ dicht in $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ ist, gibt es zu $i \in J_1$ ein x_i aus X_i und y_i aus $\frac{1}{2N} U_i$ mit $z_i = x_i + y_i$.

Definiert man $z^1 = (z_i^1)_{i \in I}$ und $z^2 = (z_i^2)_{i \in I}$ durch

$$z_i^1 := 0 \quad (i \in J), \quad z_i^1 := x_i \quad (i \in J_1), \quad z_i^1 := z_i \quad (i \in I \setminus (J \cup J_1)),$$

$$z_i^2 := -z_i \quad (i \in J), \quad z_i^2 := -y_i \quad (i \in J_1), \quad z_i^2 := 0 \quad (i \in I \setminus (J \cup J_1)),$$

$$\text{so gilt: } z^1 \in \sum_{i \in J} u_i(V_i) + \prod_{i \in I \setminus J} X_i, \quad z^2 \in \prod_{i \in I} v_i(U_i),$$

$$\text{und } \varphi(z^1, z^2) = z.$$

Es folgt, daß der Quotient $(Y/L, \mathcal{K}/L)$ topologisch isomorph zu dem separierten lokalkonvexen Raum $(Z, \mathcal{T})$ ist. Insbesondere ist L abgeschlossen.

Ist $X_i \neq Y_i$ für unendlich viele $i \in I$, so gibt es eine abzählbar unendliche Teilmenge $\{i_n: n \in \mathbb{N}\}$ in I mit $X_{i_n} \neq Y_{i_n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Sei $y_n \in Y_{i_n} \setminus X_{i_n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $z^m = (z_i^m)_{i \in I} \in Z$ durch

$$z_i^m := y_n \quad (i = i_n, 1 \leq n \leq m), \quad z_i^m := 0 \quad (i \in I \setminus \{i_1, \dots, i_m\}) \text{ definiert.}$$

Dann konvergiert die Folge $(z^m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\prod_{i \in I} (Y_i, \mathcal{T}_i)$ lokal gegen $z = (z_i)_{i \in I}$, wobei z durch $z_i := y_n$ ($i = i_n, n \in \mathbb{N}$),

$z_i := 0$ ($i \in I \setminus \{i_n: n \in \mathbb{N}\}$), definiert ist. z liegt aber offenbar nicht in Z . Damit sind $(Z, \mathcal{T})$ und $(Y/L, \mathcal{K}/L)$ nicht lokalvollständig. $\cdot/\cdot$.

Beispiele zu Satz (1.4.1):

Eigenschaften E, die eine der Bedingungen a), b), c) von Satz (1.4.1) (und damit alle) erfüllen, vererben sich offenbar nicht auf Quotienten nach abgeschlossenen linearen Teilräumen. Die Eigenschaften 1 - 9, 14, 21 - 24 aus 0.2 erfüllen also keine dieser Bedingungen. (Für 23 siehe J.Horváth [12,p.279], für 24 siehe A.Pietsch [18,p.77]. Ob sich die Eigenschaft 15 = B_r -vollständig auf Quotienten nach abgeschlossenen linearen Teilräumen vererbt, ist eine offene Frage.)

Wir zeigen, daß alle anderen Eigenschaften aus 0.2, also 10 - 13, 16 - 20, eine der Bedingungen a), b), c) erfüllen.

Beweis: Nach 0.2 vererben sich diese Eigenschaften von einem endlichen Produkt auf jeden Faktor und umgekehrt.

Es sei $\omega := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ein abzählbares Geradenprodukt und $\varphi := (\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, \tau(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, \mathbb{K}^{\mathbb{N}}))$ der Teilraum der finiten Vektoren in ω , versehen mit der feinsten lokalkonvexen Topologie.

Da ω und φ vollständige Montel-Räume sind, ist auch

$(X, \tau) := (\prod_{n \in \mathbb{N}} \varphi) \times (\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \omega)$ ein vollständiger Montel-Raum.

Es sei $L := \{((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in X : x_n \in \varphi \ (n \in \mathbb{N})\}$. Dann impliziert Lemma (1.4.2), daß der Quotient $(X/L, \tau/L)$ nicht lokalvollständig ist. Sei M ein beliebiger algebraischer Komplementärraum von L in X und $\mathcal{R}$ die feinste lokalkonvexe Topologie auf M ; $(M, \mathcal{R})$ ist dann ein vollständiger Montel-Raum.

Die Implikationsübersicht in 0.2 zeigt nun, daß das Tripel $((X, \tau), L, (M, \mathcal{R}))$ die Bedingung a) von Satz (1.4.1) für die Eigenschaften 10 - 13, 16 - 19 erfüllt.

Es sei (Z, τ) der bereits erwähnte nicht distinguerte Fréchet-Raum aus G.Köthe [13,p.438/439]. Als Fréchet-Raum ist (Z, τ) lokalkonvexer induktiver Limes der Banach-Räume $([B], p_B)$ ($B \subset Z$ absolutkonvex, beschränkt und abgeschlossen) und daher Quotient einer lokalkonvexen direkten Summe von Banach-Räumen $(X_i, \tau_i)_{i \in J}$. Ist M ein beliebiger algebraischer Komplementärraum von Z in $\bigoplus_{i \in J} X_i$, so ist M versehen mit der feinsten lokalkonvexen Topologie

$\mathcal{R}$ distinguert. Das Tripel $(\bigoplus_{i \in J} (X_i, \tau_i), Z, (M, \mathcal{R}))$ erfüllt die Bedingung a) von Satz (1.4.1) für die Eigenschaft distinguert, denn eine lokalkonvexe direkte Summe von Banach-Räumen ist distinguert (G.Köthe [13,p.287]). •/.

§ 2. Vererbbarkeit von Teilraum und Quotient auf den Ausgangsraum.

Es sei X ein topologischer linearer oder ein lokalkonvexer Raum, $L \subset X$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Für eine Reihe von Eigenschaften ist bereits bekannt, daß sie sich von L und X/L auf X vererben.

Eine topologische Gruppe erfüllt z.B. das erste Abzählbarkeitsaxiom, wenn eine Untergruppe und der zugehörige homogene Raum diese Eigenschaft besitzen (E.Hewitt, K.Ross [11,p.47] bzw. M.I. Graev [9]). Sie ist lokalkompakt bzw. kompakt bzw. zusammenhängend, wenn eine Untergruppe und der zugehörige homogene Raum lokalkompakt bzw. kompakt bzw. zusammenhängend sind (E.Hewitt, K.Ross [11,p.39 und 63]); die entsprechende Aussage gilt für vollständig (N.Bourbaki [2,Ch.III,§ 3,ex.9]).

W.Roelcke [23] hat gezeigt, daß ein lokalkonvexer Raum tonneliert bzw. halbnormierbar ist, wenn ein linearer Teilraum und der Quotient danach tonneliert bzw. halbnormierbar sind. Die entsprechende Aussage gilt für einen topologischen linearen Raum und die Eigenschaft lokalbeschränkt ([23]). Mit Hilfe eines Lemmas von W.Roelcke ([23] bzw. Hilfssatz (5.8) (Anhang)) erhält man unmittelbar, daß ein lokalkonvexer Raum seine schwache Topologie bzw. seine Mackey-Topologie trägt, wenn ein linearer Teilraum und der zugehörige Quotient dies tun (Folgerung 1 und 2 aus Hilfssatz (5.8) (Anhang)).

Ziel dieses Paragraphen ist es nun, die übrigen im Abschnitt 0.2 aufgeführten Eigenschaften auf Vererbbarkeit in obiger Situation zu untersuchen. Die Antwort ist für eine Vielzahl von Eigenschaften negativ, wobei es mir nicht immer möglich war, "Simultan-Gegenbeispiele" in der Art der Gegenbeispiele in § 1 anzugeben. Es werden zwei Methoden zur Konstruktion von Beispielen entwickelt.

2.1 Gegenbeispiele erster Art

Das wesentliche Hilfsmittel zur Konstruktion dieser Gegenbeispiele ist das folgende Lemma.

2.1.1 Lemma: Es seien $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ separierte unvollständige topologische lineare Räume, $a_i \in \widetilde{X}_i \setminus X_i$ ($i = 1, 2$), $a := (a_1, a_2) \in \widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2$. Es bezeichne $\mathcal{T}$ die von $\widetilde{\mathcal{T}}_1 \times \widetilde{\mathcal{T}}_2$ auf $X_1 \times X_2 + [a]$ induzierte Topologie, $q: X_1 \times X_2 + [a] \longrightarrow (X_1 \times X_2 + [a])/[a]$ die Quotientenabbildung und $\mathcal{T}$ die Initialtopologie auf $X_1 \times X_2$ bezüglich $q|_{X_1 \times X_2}: X_1 \times X_2 \longrightarrow ((X_1 \times X_2 + [a])/[a], \mathcal{T}/[a])$.

Dann gilt:

- $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \not\subseteq \mathcal{T}$,
- $\mathcal{T} \cap (X_1 \times \{0\}) = (\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) \cap (X_1 \times \{0\})$,
- $\overline{X_1 \times \{0\}}^{\mathcal{T}} = X_1 \times \{0\}$,
- $((X_1 \times X_2)/(X_1 \times \{0\}), \mathcal{T}/(X_1 \times \{0\}))$ ist topologisch isomorph zu $((X_2 + [a_2])/[a_2], (\widetilde{\mathcal{T}}_2 \cap (X_2 + [a_2])/[a_2]))$.

Beweis: Die Richtigkeit von a) ist unmittelbar einzusehen.

b) Da $X_1 \times \{0\}$ $\mathcal{T}$ -abgeschlossen in $X_1 \times \{0\} + [a]$ ist, ist die Summe $X_1 \times \{0\} + [a]$ topologisch direkt in der von $\mathcal{T}$ induzierten Topologie. Daher ist

$$q|_{X_1 \times \{0\}}: (X_1 \times \{0\}, \mathcal{T} \cap (X_1 \times \{0\})) \longrightarrow ((X_1 \times \{0\} + [a])/[a], (\mathcal{T} \cap (X_1 \times \{0\} + [a])/[a]))$$

topologisch. Aus

$$(\mathcal{T} \cap (X_1 \times \{0\} + [a]))/[a] = (\mathcal{T}/[a]) \cap ((X_1 \times \{0\} + [a])/[a])$$

folgt die Aussage b).

c) Da $X_1 \times \{0\} + [a]$ $\mathcal{T}$ -abgeschlossen ist, ist $q(X_1 \times \{0\})$ $(\mathcal{T}/[a])$ -abgeschlossen und somit $X_1 \times \{0\}$ $\mathcal{T}$ -abgeschlossen.

d) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: ((X_1 \times X_2)/(X_1 \times \{0\}), \mathcal{T}/(X_1 \times \{0\})) &\longrightarrow \\ ((X_2 + [a_2])/[a_2], (\widetilde{\mathcal{T}}_2 \cap (X_2 + [a_2])/[a_2])), & \\ (x_1, x_2) + X_1 \times \{0\} &\longrightarrow x_2 + [a_2], \end{aligned}$$

ist ein algebraischer Isomorphismus.

Wir zeigen, daß φ topologisch ist.

φ ist stetig:

Es genügt zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} \psi: (X_1 \times X_2, \mathcal{T}) &\longrightarrow (X_2 + [a_2])/[a_2], \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_2 + [a_2], \end{aligned}$$

stetig ist.

Sei U eine $(\tilde{\mathcal{T}}_2 \cap (X_2 + [a_2]))$ -Nullumgebung in $X_2 + [a_2]$.

$$V := (((X_1 + [a_1]) \times U) \cap (X_1 \times X_2 + [a_2]) + [a_1]) \cap (X_1 \times X_2)$$

ist dann eine $\mathcal{T}$ -Nullumgebung und es gilt $\psi(V) \subset U + [a_2]$, wie man sofort bestätigt.

φ^{-1} ist stetig:

Es genügt zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} \xi: (X_2 + [a_2], \tilde{\mathcal{T}}_2 \cap (X_2 + [a_2])) &\longrightarrow ((X_1 \times X_2)/(X_1 \times \{0\}), \mathcal{T}/(X_1 \times \{0\})) \\ x_2 + \lambda a_2 &\longmapsto (0, x_2) + X_1 \times \{0\}, \end{aligned}$$

stetig ist.

Sei W eine $\mathcal{T}$ -Nullumgebung in $X_1 \times X_2$. Dann gibt es

$$V_i \in \mathcal{U}_0(X_i + [a_i], \tilde{\mathcal{T}}_i \cap (X_i + [a_i])) \quad (i = 1, 2) \text{ mit}$$

$$((V_1 \times V_2) \cap (X_1 \times X_2 + [a_2]) + [a_1]) \cap (X_1 \times X_2) \subset W \quad \text{und es gilt:}$$

$$\xi(V_2) \subset W + X_1 \times \{0\}.$$

Ist nämlich $v_2 = x_2 + \lambda a_2 \in V_2$ mit $x_2 \in X_2$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so gibt es $x_1 \in X_1$ mit $x_1 + \lambda a_1 \in V_1$ (da X_1 dicht in $X_1 + [a_1]$ ist), und man erhält

$$\begin{aligned} \xi(v_2) &= (0, x_2) + X_1 \times \{0\} = (x_1 + \lambda a_1, x_2 + \lambda a_2) - \lambda a + X_1 \times \{0\} \\ &\in W + X_1 \times \{0\}. \quad \cdot/. \end{aligned}$$

Anmerkung: Die Aussagen b), c), d) bleiben offenbar richtig, wenn man $X_1 \times \{0\}$ durch $\{0\} \times X_2$ sowie a_2 durch a_1 , $X_2 + [a_2]$ durch $X_1 + [a_1]$ und $\tilde{\mathcal{T}}_2$ durch $\tilde{\mathcal{T}}_1$ ersetzt. Ferner ist $\mathcal{T}$ genau dann lokalkonvex, wenn $\tilde{\mathcal{T}}_1$ und $\tilde{\mathcal{T}}_2$ lokalkonvex sind.

Der folgende Satz zeigt, daß (unter gewissen Zusatzvoraussetzungen) die Nichtvererbbarkeit einer Eigenschaft von dichten Hyperebenen auf den Raum die Nichtvererbbarkeit dieser Eigenschaft von Teilraum und Quotient auf den Ausgangsraum impliziert.

2.1.2 Satz: Es sei E eine Eigenschaft topologischer linearer Räume, die sich auf Quotienten nach abgeschlossenen linearen Teilräumen vererbt. Ferner gelte:

- a) Es existiert ein separierter unvollständiger topologischer linearer Raum $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $a_1 \in \tilde{X}_1 \setminus X_1$ derart, daß $(X_1, \mathcal{T}_1)$ E besitzt, aber der Quotient $((X_1 + [a_1])/[a_1], (\tilde{\mathcal{T}}_1 \cap (X_1 + [a_1])/[a_1])$ nicht.
- b) Es existiert ein separierter topologischer linearer Raum $(Z, \mathcal{R})$ mit $\mathcal{R} \not\supset \mathfrak{s}(Z, Z^*)$, der E besitzt.

Dann existiert auch ein separierter topologischer linearer Raum $(X, \mathcal{T})$ und ein abgeschlossener linearer Teilraum $L \subset X$ derart, daß $(L, \mathcal{T} \cap L)$ und $(X/L, \mathcal{T}/L)$ E besitzen, aber $(X, \mathcal{T})$ nicht.

Beweis:

Bildet man die topologisch direkte Summe von $(Z, \mathcal{R})$ und einer Geraden $[a_2]$, so gibt es in dem separierten topologischen linearen Raum $(Z, \mathcal{R}) \oplus [a_2]$ eine dichte Hyperebene X_2 mit $a_2 \notin X_2$. Dies sieht man wie folgt ein: Nach Voraussetzung b) gibt es in $(Z, \mathcal{R})$ eine dichte Hyperebene H_1 ; $X_2 := H_1 + [h+a_2]$ mit $h \in Z \setminus H_1$ leistet dann das Gewünschte.

Die von $(Z, \mathcal{R}) \oplus [a_2]$ auf X_2 induzierte Topologie bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_2$.

Wir bilden nun aus $(X_i, \mathcal{T}_i)$ und a_i ($i = 1, 2$) gemäß Lemma (2.1.1) den separierten topologischen linearen Raum $(X, \mathcal{T}) := (X_1 \times X_2, \mathcal{T})$. Lemma (2.1.1) impliziert:

- a) Der $\mathcal{T}$ -abgeschlossene lineare Teilraum $L := X_1 \times \{0\}$ ist topologisch isomorph zu $(X_1, \mathcal{T}_1)$, besitzt also E .
- b) X/L ist topologisch isomorph zu $(X_2 + [a_2])/[a_2]$ und damit topologisch isomorph zu $(Z, \mathcal{R})$, besitzt folglich E .
- c) X besitzt E nicht. Andernfalls würde der Quotient $X/(\{0\} \times X_2)$, der topologisch isomorph zu $(X_1 + [a_1])/[a_1]$ ist, ebenfalls die Eigenschaft E besitzen, was Voraussetzung a) widerspricht. $\cdot/\cdot$.

Anmerkung 1: Satz (2.1.2) bleibt offenbar richtig, wenn man stets "topologisch linear" durch "lokalkonvex" ersetzt.

Anmerkung 2:

- 1) Voraussetzung a) in Satz (2.1.2) ist nicht überflüssig, wie die Eigenschaft tonneliert zeigt. Die Eigenschaft tonneliert

vererbt sich auf Quotienten, jeder unendlich dimensionale Banach-Raum $(Z, \mathcal{R})$ erfüllt die Bedingung b), aber die Eigenschaft tonneliert vererbt sich von Teilraum und Quotient auf einen lokalkonvexen Ausgangsraum (W. Roelcke [23]).

- 2) Voraussetzung b) in Satz (2.1.2) ist ebenfalls nicht überflüssig. Die Eigenschaft E_0 lokalkonvexer Räume, die durch $(X, \mathcal{T})$ hat $E_0 : \iff \mathcal{T} \supset \sigma(X, X^*)$ definiert ist, vererbt sich auf Quotienten. E_0 erfüllt auch a). Ist nämlich X_1 ein unendlich dimensionaler $\mathbb{K}$ -linearer Raum, so besitzt $(X_1, \sigma(X_1, X_1^*))$ die Eigenschaft E_0 ; $(X_1, \sigma(X_1, X_1^*))$ ist unvollständig und für jedes $a_1 \in \tilde{X}_1 \setminus X_1$ gilt: $X_1 + [a_1]$ erfüllt E_0 nicht. E_0 vererbt sich von Teilraum und Quotient auf einen lokalkonvexen Ausgangsraum, wie man mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach leicht beweist.

Beispiele:

1) Die Eigenschaften bornologisch und ultrabornologisch erfüllen die Voraussetzungen von Satz (2.1.2)

Beweis: Es ist nur a) und b) zu zeigen.

Seien $(X_1, \mathcal{T}_1) := \mathbb{R}^{[\mathbb{R}]}$ mit der von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ induzierten Topologie, $a_1 := (1)_{r \in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $(Z, \mathcal{R}) := (l^2, \|\cdot\|_2)$.

$(X_1, \mathcal{T}_1)$ ist ein folgenvollständiger ultrabornologischer Raum (V. Eberhardt [8, p. 5, 1.6 Korollar]), $(X_1 + [a_1], \tilde{\mathcal{T}}_1 \cap (X_1 + [a_1]))$ ist nicht bornologisch, da dieser Raum eine folgenabgeschlossene dichte Hyperebene besitzt; somit ist auch $(X_1 + [a_1])/[a_1]$ nicht bornologisch. $(Z, \mathcal{R})$ ist als Hilbert-Raum vollständig und ultrabornologisch.

Durch die im Beweis von Satz (2.1.2) ausgeführte Konstruktion erhält man aus dem Tripel (X_1, a_1, Z) einen separierten lokalkonvexen nicht bornologischen Raum X mit abgeschlossenem Teilraum L derart, daß L folgenvollständig und ultrabornologisch ist und der Quotient X/L ein Hilbert-Raum ist.

2) Die Eigenschaften lokalkonvexer Räume, die schwache Topologie eines Hilbert- bzw. Banach- bzw. Fréchet-Raums zu tragen, erfüllen ebenfalls die Voraussetzungen von Satz (2.1.2) (W. Roelcke).

Beweis: Diese Eigenschaften vererben sich auf Quotienten, denn für jeden linearen Teilraum L eines lokalkonvexen Raums X gilt: $\mathfrak{G}(X, X')/L = \mathfrak{G}(X/L, L^0)$ und $\tau(X, X')/L = \tau(X/L, L^0)$ (G.Köthe [13, p.280]).

Sei $(X_1, \tau_1) := (Z, \mathfrak{R}) := (l^2, \mathfrak{G}(l^2, l^2))$, $a_1 \in X_1' \setminus X_1$ beliebig. Wir zeigen, daß $\tau(X_1 + [a_1], X_1') = \tau(l^2 + [a_1], l^2)$ keine Fréchet-Raum-Topologie auf $X_1 + [a_1]$ ist.

Andernfalls wäre $(X_1 + [a_1], \tau(X_1 + [a_1], X_1'))$ quasitonneliert; hieraus würde folgen, daß die Topologie $\tau(X_1 + [a_1], X_1') \cap X_1$ auf X_1 mit der Hilbert-Raum-Topologie $\tau(X_1, X_1')$ übereinstimmt, denn Hyperebenen quasitonnelierter Räume sind quasitonneliert, also insbesondere Mackey-Räume (M.Valdivia [27, p.2]). Dies steht im Widerspruch zur Unvollständigkeit von $(X_1, \tau(X_1 + [a_1], X_1') \cap X_1)$.

Da $\tau(X_1 + [a_1], X_1')$ keine Fréchet-Raum-Topologie ist, ist auch $\tau(X_1 + [a_1], X_1')/[a_1]$ keine Fréchet-Raum-Topologie. Die zugehörige schwache Topologie auf $(X_1 + [a_1])/[a_1]$ ist $\mathfrak{G}(X_1 + [a_1], X_1')/[a_1]$.

Hiermit ist gezeigt, daß das Tripel (X_1, a_1, Z) die Voraussetzungen a) und b) von Satz (2.1.2) für oben genannte Eigenschaften erfüllt. $\cdot/\cdot$

Der folgende Satz zeigt, daß (unter gewissen Zusatzvoraussetzungen) die Nichtvererbbarkeit einer Eigenschaft auf dichte Hyperebenen die Nichtvererbbarkeit dieser Eigenschaft von Teilraum und Quotient auf den Ausgangsraum impliziert.

2.1.3 Satz: Es sei E eine Eigenschaft topologischer linearer Räume, die sich auf abgeschlossene lineare Teilräume vererbt. Ferner gelte:

- Es existiert ein unvollständiger separierter topologischer linearer Raum (X_1, τ_1) , der E besitzt.
- Es existiert ein separierter unvollständiger topologischer linearer Raum (X_2, τ_2) und $a_2 \in \hat{X}_2 \setminus X_2$ derart, daß der Quotient $((X_2 + [a_2])/[a_2], (\tau_2 \cap (X_2 + [a_2]))/[a_2])$ E besitzt, aber (X_2, τ_2) nicht.

Dann existiert auch ein separierter topologischer linearer Raum (X, τ) und ein abgeschlossener linearer Teilraum $L \subset X$ derart, daß $(L, \tau \cap L)$ und $(X/L, \tau/L)$ E besitzen, aber (X, τ) nicht.

Beweis: Sei $a_1 \in \hat{X}_1 \setminus X_1$. Wir bilden nun aus (X_1, τ_1) und a_i ($i = 1, 2$) gemäß Lemma (2.1.1) den separierten topologischen linearen Raum $(X, \tau) := (X_1 \times X_2, \tau)$.

Lemma (2.1.1) impliziert:

- a) Der τ -abgeschlossene lineare Teilraum $L := X_1 \times \{0\} \subset X$ ist topologisch isomorph zu (X_1, τ_1) , besitzt also E wegen Voraussetzung a).
- b) X/L ist topologisch isomorph zu $(X_2 + [a_2])/[a_2]$, besitzt somit wegen Voraussetzung b) die Eigenschaft E.
- c) X besitzt E nicht. Andernfalls würde der abgeschlossene lineare Teilraum $\{0\} \times X_2$, der topologisch isomorph zu (X_2, τ_2) ist, ebenfalls die Eigenschaft E besitzen, was Voraussetzung b) widerspricht. $\cdot/\cdot$

Anmerkung 1: Satz (2.1.3) bleibt offenbar richtig, wenn man stets "topologisch linear" durch "lokalconvex" ersetzt.

Anmerkung 2:

1) Die Voraussetzung: "E vererbt sich auf abgeschlossene lineare Teilräume" in Satz (2.1.3) ist nicht überflüssig, wie die Eigenschaft lokalconvexer Räume, ein Mackey-Raum zu sein, zeigt:

Seien hierzu Y ein unendlich dimensionaler $\mathbb{K}$ -linearer Raum, H eine dichte Hyperebene in dem Geradenprodukt Y^* , $f \in Y^* \setminus H$, $(X_2, \tau_2) := (\text{Kern } f, \tau(Y, H) \cap \text{Kern } f)$ und $a_2 \in Y \setminus X_2$.

Dann ist $X'_2 = X_2^*$, wie man sich leicht überlegt;

$\tau(X_2, X'_2)$ ist als feinste lokalconvexe Topologie auf X_2 vollständig, also von der unvollständigen Topologie τ_2 verschieden. (X_2, τ_2) ist damit kein Mackey-Raum, während $(X_2 + [a_2])/[a_2]$ als Quotient eines Mackey-Raums ein Mackey-Raum ist.

Da es offenbar unvollständige Mackey-Räume gibt, sind die Voraussetzungen a) und b) von Satz (2.1.3) erfüllt.

Die Eigenschaft, ein Mackey-Raum zu sein, vererbt sich aber von Teilraum und Quotient auf einen lokalconvexen Ausgangsraum (Folgerung 2 aus Hilfssatz (5.8) (Anhang)).

2) Die Voraussetzung a) in Satz (2.1.3) ist nicht überflüssig, wie die Eigenschaft "vollständig" zeigt.

Vollständigkeit vererbt sich auf abgeschlossene lineare Teilräume; ferner vererbt sie sich von Teilraum und Quotient auf

den Ausgangsraum (N.Bourbaki [2, Ch.III, § 3, ex.9]).

Setzt man für (X_2, τ_2) eine dichte Hyperebene eines Banach-Raums und $a_2 \in \tilde{X}_2 \setminus X_2$ beliebig, so ist damit auch Voraussetzung b) von Satz (2.1.3) erfüllt.

3) Die Voraussetzung b) in Satz (2.1.3) ist nicht überflüssig, wie die Eigenschaft lokalkonvexer Räume, ein Schwartz-Raum zu sein, zeigt.

Diese Eigenschaft vererbt sich auf lineare Teilräume; es gibt offenbar unvollständige Schwartz-Räume, aber die Eigenschaft, Schwartz-Raum zu sein, vererbt sich von Teilraum und Quotient auf einen lokalkonvexen Ausgangsraum, wie in Satz (2.3.3) bewiesen werden wird.

Beispiele: Die Eigenschaften lokalvollständig, folgenvollständig, quasivollständig, halbrelexiv, Semi-Montel-Raum erfüllen die Voraussetzungen von Satz (2.1.3).

Beweis: Es ist nur a) und b) zu zeigen.

Seien (X_1, τ_1) ein unvollständiger Montel-Raum (I.Amemyia, Y.Kōmura [1, § 2]), (X_2, τ_2) eine dichte Hyperebene des Geradenprodukts $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und $a_2 \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \setminus X_2$. Dann ist X_2 als dichte Hyperebene eines Fréchet-Raums nicht lokalvollständig, während der Quotient $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}/[a_2]$ ein Fréchet-Montel-Raum ist. Das Tripel (X_1, X_2, a_2) erfüllt also die Voraussetzungen a) und b) von Satz (2.1.3) für alle oben genannten Eigenschaften (siehe die Implikationsübersicht in 0.2).

Mit Hilfe der Konstruktion im Beweis von Satz (2.1.3) erhält man aus diesen Vorgaben einen separierten lokalkonvexen nicht lokalvollständigen Raum X mit abgeschlossenem Teilraum L derart, daß L ein Montel-Raum und X/L ein Geradenprodukt ist. $\cdot/\cdot$

2.2 Gegenbeispiele zweiter Art

In diesem Abschnitt werden Beispiele dafür angegeben, daß sich die Eigenschaften quasitonneliert, abzählbar quasitonneliert, DF-Raum und distinguiert nicht von einem Teilraum und dem entsprechenden Quotienten auf den Ausgangsraum vererben. Der Konstruktion dieser Gegenbeispiele liegt ein gemeinsames Prinzip zu Grunde, das zunächst erläutert werden soll.

2.2.1 Lemma: Es sei (X, τ) ein topologischer linearer Raum, $L \subset X$ ein dichter linearer Teilraum und σ eine lineare Topologie auf dem Quotienten X/L . $\mathcal{R}$ bezeichne die Initialtopologie auf X bezüglich der Identität $\text{id}_X: X \longrightarrow (X, \tau)$ und der Quotientenabbildung $q: X \longrightarrow (X/L, \sigma)$. Dann gilt:

- a) $\mathcal{R} \cap L = \tau \cap L$, $\mathcal{R}/L = \sigma$;
- b) Sind $(L, \tau \cap L)$ und $(X/L, \sigma)$ lokalkonvexe Mackey-Räume und $Z := \{f \circ q: f \in (X/L, \sigma)'\} \subset X^*$, so ist $\mathcal{R}$ gleich $\tau(X, (X, \tau)' + Z)$.

Beweis:

a) Wegen der Transitivität der Bildung der Initialtopologie ist $\mathcal{R} \cap L$ die größte Topologie auf L , bezüglich derer $\text{id}_X|_L: L \longrightarrow (X, \tau)$ und $q|_L: L \longrightarrow (X/L, \sigma)$ stetig sind, also gleich $\tau \cap L$.

Aus der Stetigkeit von $q: (X, \mathcal{R}) \longrightarrow (X/L, \sigma)$ folgt $\sigma \subset \mathcal{R}/L$.

Sei $U \in \mathcal{U}_0(X, \mathcal{R})$; dann existieren $V \in \mathcal{U}_0(X, \tau)$ und $W \in \mathcal{U}_0(X/L, \sigma)$ mit $V \cap q^{-1}(W) \subset U$ und es gilt: $W \subset q(U)$.

Ist nämlich $w \in W$ und $x \in X$ mit $w = q(x)$, so gibt es wegen der τ -Dichtheit von L in X ein $l \in L$ und ein $v \in V$ mit $x = l + v$; aus $q(v) = q(x) \in W$ folgt $v \in V \cap q^{-1}(W) \subset U$ und $w = q(v) \in q(U)$.

Damit ist $\sigma = \mathcal{R}/L$ bewiesen.

b) Da $(L, \tau \cap L)$ lokalkonvex und τ -dicht in X ist, ist auch (X, τ) lokalkonvex; damit ist auch $(X, \mathcal{R})$ als Initialtopologie bezüglich lokalkonvexer Topologien lokalkonvex.

Da $(L, \mathcal{R} \cap L)$ und $(X/L, \mathcal{R}/L)$ Mackey-Räume sind, ist wegen Folgerung 2 aus Hilfssatz (5.8) auch $(X, \mathcal{R})$ ein Mackey-Raum.

Wir zeigen, daß $(X, \mathcal{R})' = (X, \tau)' + Z$ ist. Damit ist dann b) bewiesen.

Offenbar gilt $(X, \tau)' + Z \subset (X, \mathcal{R})'$.

Andererseits hat man $\tau(X, (X, \gamma)' + Z) \supset \tau(X, (X, \gamma)') \supset \gamma$;
 aus $\tau(X, (X, \gamma)' + Z)/L = \tau(X/L, L^{\circ}((X, \gamma)') + Z)) =$
 [13, p.280]

$\tau(X/L, (X/L, \gamma)')$ folgt die Stetigkeit von
 $q: (X, \tau(X, (X, \gamma)' + Z)) \longrightarrow (X/L, \gamma)$, und damit
 $\mathcal{R} \subset \tau(X, (X, \gamma)' + Z)$, d.h. $(X, \mathcal{R})' \subset (X, \gamma)' + Z$. $\cdot/.$

Folgerung: Ist (X, γ) lokalkonvex, $L \subset X$ ein dichter linearer Teilraum mit $\gamma \cap L = \tau(L, X')$, $q: X \rightarrow X/L$ kanonisch, $Y \subset (X/L)^*$ ein linearer Teilraum, $Z := \{f \circ q: f \in Y\}$ und $\mathcal{R}_1 := \tau(X, X' + Z)$, so gilt: $\mathcal{R}_1 \cap L = \gamma \cap L$ und $\mathcal{R}_1/L = \tau(X/L, Y)$.
 Ist Y dicht in $((X/L)^*, \sigma((X/L)^*, X/L))$, so ist L in $(X, \mathcal{R}_1)$ abgeschlossen.

Beweis: Setzt man $\gamma := \tau(X/L, Y)$, so folgt mit b) :

$\mathcal{R} = \tau(X, X' + Z) = \mathcal{R}_1$. Mit a) erhält man:

$\mathcal{R}_1 \cap L = \mathcal{R} \cap L = \gamma \cap L$ und $\mathcal{R}_1/L = \mathcal{R}/L = \tau(X/L, Y)$.

Ist Y $\sigma((X/L)^*, X/L)$ -dicht, so ist $\tau(X/L, Y)$ separiert und folglich L abgeschlossen in $(X, \mathcal{R}_1)$. $\cdot/.$

Anmerkung: Durch geeignete Wahl von (X, γ) , L und Y kann man versuchen zu erreichen, daß $(L, \mathcal{R}_1 \cap L)$ und $(X/L, \mathcal{R}_1/L)$ eine gewisse Eigenschaft besitzen, aber $(X, \mathcal{R}_1)$ nicht.

2.2.2 Gegenbeispiel für die Eigenschaften quasitonneliert und abzählbar quasitonneliert

Es sei (X, γ) ein tonnelierter separierter Raum, dessen beschränkte Teilmengen endlich dimensional sind und der nicht die feinste lokalkonvexe Topologie trägt (etwa der unvollständige Montel-Raum in I. Amemiya, Y. Kōmura [1, § 2]). Nach Hilfssatz (5.3) (Anhang) besitzt X einen abzählbar unendlich kodimensionalen dichten linearen Teilraum L . $(L, \gamma \cap L)$ ist dann ein Montel-Raum, denn seine beschränkten Teilmengen sind endlich dimensional und $(L, \gamma \cap L)$ ist als abzählbar kodimensionaler linearer Teilraum eines tonnelierten Raums tonneliert (M. Valdivia [28, Theorem 3]).
 Ferner sei $Y \subset (X/L)^*$ ein linearer Teilraum derart, daß $(X/L, \tau(X/L, Y))$ ein Prä-Hilbert-Raum ist (ein derartiger Raum Y existiert, da X/L als linearer Teilraum von $l^2(\mathbb{N})$ aufgefaßt werden kann).

$q: X \rightarrow X/L$ sei die Quotientenabbildung, $Z := \{f \circ q: f \in Y\}$ und

$$\mathcal{R}_1 := \tau(X, X' + Z).$$

Die Folgerung aus Lemma (2.2.1) impliziert nun:

L ist abgeschlossen in dem separierten lokalkonvexen Raum $(X, \mathcal{R}_1)$; wegen $\mathcal{R}_1 \cap L = \mathcal{V} \cap L$ ist $(L, \mathcal{R}_1 \cap L)$ ein Montel-Raum; wegen $\mathcal{R}_1/L = \tau(X/L, Y)$ ist $(X/L, \mathcal{R}_1/L)$ ein Prä-Hilbert-Raum. Wir zeigen, daß $(X, \mathcal{R}_1)$ nicht abzählbar quasitonneliert ist. Andernfalls wäre $(X, \mathcal{R}_1)$ sogar abzählbar tonneliert, denn wegen $\mathcal{R}_1 \supset \mathcal{V}$ ist jede $\mathcal{R}_1$ -beschränkte Menge insbesondere $\mathcal{V}$ -beschränkt und damit endlich dimensional. Dann wäre auch der Quotient $(X/L, \mathcal{R}_1/L)$ abzählbar tonneliert im Widerspruch zu der Tatsache, daß jeder abzählbar dimensionale separierte abzählbar tonnelierte Raum die feinste lokalkonvexe Topologie trägt (M.De Wilde, C.Houet [7, Corollary 3]).

2.2.3 Gegenbeispiel für die Eigenschaft DF-Raum.

Es sei E ein unendlich dimensionaler Fréchet-Montel-Raum, der stetige Normen besitzt (etwa der Grundraum der temperierten Distributionen auf $\mathbb{R}^n$ (J.Horváth [12, p.283, example 4])) und $(X, \mathcal{V}) := (E', \tau(E', E)) = (E', \beta(E', E))$. $(X, \mathcal{V})$ ist ein vollständiger ultrabornologischer DF-Montel-Raum (vollständig, bornologisch, DF-Raum : G.Köthe [13, p.403], Montel-Raum: G.Köthe [13, p.372]; ein vollständiger bornologischer Raum ist ultrabornologisch). Da E stetige Normen besitzt, gibt es eine absolutkonvexe Nullumgebung U in E mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} U = \{0\}$.

U^0 ist dann eine $\mathcal{V}$ -beschränkte Teilmenge von X , die wegen

$$X = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} U \right)^0 = \overline{\Gamma \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} n U^0 \right)}^{\mathcal{V}} = [U^0]^{\mathcal{V}} \text{ total in } (X, \mathcal{V})$$

ist. Folglich gibt es in dem DF-Raum $(X, \mathcal{V})$ eine aufsteigende Fundamentalfolge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der beschränkten Mengen mit absolutkonvexen abgeschlossenen totalen B_n ($n \in \mathbb{N}_0$). Kein B_n kann absorbant sein, denn der unendlich dimensionale Montel-Raum $(X, \mathcal{V})$ ist nicht normierbar und kann deswegen keine beschränkte Nullumgebung besitzen. Wir können also o.E. voraussetzen, daß $[B_{n+1}] \not\supseteq [B_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei F_n ein algebraischer Komplementärraum von $[B_{n-1}]$ in $[B_n]$, H_n eine Hyperebene in F_n und $x_n \in F_n \setminus H_n$.

Definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ den linearen Teilraum $M_n \subset X$ durch $M_n := [B_0] + \sum_{k=1}^n H_k$, so erhalten wir eine aufsteigende Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von dichten linearen Teilräumen von X mit

$M_{n+1} \cap [B_n] = M_n$ und $\dim([B_n]/M_n) = n$ ($n \in \mathbb{N}$), wie man durch elementare Überlegungen bestätigt. Der dichte lineare Teilraum $M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ in X ist abzählbar unendlich kodimensional in X mit Kobasis $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und es gilt $\dim((M + [B_n])/M) = \dim((M + \{x_k: 1 \leq k \leq n\})/M) = n$ ($n \in \mathbb{N}$).

$(M, \mathcal{I} \cap M)$ ist als abzählbar kodimensionaler linearer Teilraum eines ultrabornologischen DF-Raums ein tonnelierter bornologischer DF-Raum (M.Valdivia [28, Theorem 3] und [29, Corollary 1.3]).

Es sei nun wie in (2.2.2) $Y \subset (X/M)^*$ ein linearer Teilraum derart, daß $(X/M, \tau(X/M, Y))$ ein Prä-Hilbert-Raum ist; ferner sei $q: X \rightarrow X/M$ kanonisch, $Z := \{f \circ q: f \in Y\}$ und $\mathcal{R}_1 := \tau(X, X' + Z)$. Die Folgerung aus Lemma (2.2.1) impliziert:

M ist abgeschlossen in dem separierten lokalkonvexen Raum $(X, \mathcal{R}_1)$; wegen $\mathcal{R}_1 \cap M = \mathcal{I} \cap M$ ist $(M, \mathcal{R}_1 \cap M)$ ein tonnelierter bornologischer DF-Raum; wegen $\mathcal{R}_1/M = \tau(X/M, Y)$ ist $(X/M, \mathcal{R}_1/M)$ ein Prä-Hilbert-Raum.

Wir zeigen, daß $(X, \mathcal{R}_1)$ kein DF-Raum ist.

Wir nehmen an, $(X, \mathcal{R}_1)$ sei ein DF-Raum. Dann liegt jede $(\mathcal{R}_1/M)$ -beschränkte Teilmenge von X/M im Abschluß des kanonischen Bilds $q(B)$ einer $\mathcal{R}_1$ -beschränkten Teilmenge $B \subset X$ (G.Köthe [13, p.404]). Da $\mathcal{R}_1$ feiner als $\mathcal{I}$ ist und $\mathcal{R}_1/M$ normierbar ist, gibt es $n \in \mathbb{N}$ derart, daß $\overline{q(B_n)}^{\mathcal{R}_1/M}$ absorbant in X/M ist.

Wegen $q^{-1}(\overline{q(B_n)}^{\mathcal{R}_1/M}) = \overline{[B_n] + M}^{\mathcal{R}_1}$ ist dann $M + [B_n]$ ein dichter linearer Teilraum in $(X, \mathcal{R}_1)$. Dies ist ein Widerspruch, denn M ist $\mathcal{R}_1$ -abgeschlossen und hat in $M + [B_n]$ endliche Kodimension, folglich ist auch $M + [B_n]$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{R}_1)$ und von X verschieden.

Anmerkung: Der Raum $(X, \mathcal{R}_1)$ in obigem Beispiel (2.2.3) besitzt $(B_n \cap M + n(\bigcap_{k=1}^n \{x_k: 1 \leq k \leq n\}))_{n \in \mathbb{N}}$ als Fundamentalfolge der beschränkten Mengen, wie man sich mit Hilfe von $\dim((M + [B_n])/M) < \infty$, $\mathcal{R}_1 \supset \mathcal{I}$, $\mathcal{R}_1 \cap M = \mathcal{I} \cap M$ und $M = \overline{M}^{\mathcal{R}_1}$ leicht überlegt. Diese Tatsache legt die Frage nahe, ob sich die

Eigenschaft lokalkonvexer Räume, eine Fundamentalfolge der beschränkten Mengen zu besitzen, von einem Teilraum und dem entsprechenden Quotienten auf den Ausgangsraum vererbt.

Hierzu folgendes Gegenbeispiel:

Beispiel: Es sei X ein abzählbar unendlich dimensionaler $\mathbb{K}$ -linearer Raum. X kann als dichter linearer Teilraum von $(X^{**}, \mathcal{G}(X^{**}, X^*))$ aufgefaßt werden, denn das duale Paar (X, X^*) ist trennend; $(X, \mathcal{G}(X^{**}, X^*) \cap X)$ besitzt eine Fundamentalfolge der beschränkten Mengen, denn $\mathcal{G}(X^{**}, X) \cap X = \mathcal{G}(X, X^*)$ und die $\mathcal{G}(X, X^*)$ -beschränkten Teilmengen von X sind endlich dimensional. Man kann einen linearen Teilraum $Y \subset (X^{**}/X)^*$ so wählen, daß $\tau(X^{**}/X, Y)$ eine Banach-Raum-Topologie auf X^{**}/X ist. X^{**}/X ist nämlich algebraisch isomorph zu $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und damit auch zu $l^\infty(\mathbb{N})$ (N.Bourbaki, [3, Ch.I, § 1, ex.5b]).

Es sei $q: X^{**} \rightarrow X^{**}/X$ kanonisch und $\mathcal{R}$ die Initialtopologie auf X^{**} bezüglich der beiden linearen Abbildungen $\text{id}_{X^{**}}: X^{**} \rightarrow (X^{**}, \mathcal{G}(X^{**}, X^*))$ und $q: X^{**} \rightarrow (X^{**}/X, \tau(X^{**}/X, Y))$. Lemma (2.2.1) impliziert:

X ist abgeschlossen in dem separierten lokalkonvexen Raum $(X^{**}, \mathcal{R})$; wegen $\mathcal{R} \cap X = \mathcal{G}(X, X^*)$ besitzt $(X, \mathcal{R} \cap X)$ eine Fundamentalfolge der beschränkten Mengen; wegen $\mathcal{R}/X = \tau(X^{**}/X, Y)$ ist $(X^{**}/X, \mathcal{R}/X)$ sogar ein Banach-Raum.

Wir zeigen, daß $(X^{**}, \mathcal{R})$ keine Fundamentalfolge der beschränkten Mengen besitzt.

Andernfalls wäre wegen $\mathcal{R}_1 \supset \mathcal{G}(X^{**}, X^*)$ der Raum $(X^{**}, \mathcal{G}(X^{**}, X^*))$ Vereinigung von abzählbar vielen $\mathcal{G}(X^{**}, X^*)$ -beschränkten und abgeschlossenen Mengen. Dies ist ein Widerspruch zu der Tatsache, daß das Geradenprodukt $(X^{**}, \mathcal{G}(X^{**}, X^*))$ ein nicht normierbarer Baire-Raum ist.

2.2.4 Gegenbeispiel für die Eigenschaft distinguert

Es sei $(\lambda, \mathcal{R})$ der von G.Köthe [13, p.438/439] konstruierte nicht distinguerte Fréchet-Raum, λ^x sein stetiges Dual. Die Dimension von λ^x ist gleich der Kardinalität der reellen Zahlen, denn - wie aus der Konstruktion in loc.cit. hervorgeht - kann λ^x einerseits mit einem linearen Teilraum von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (algebraisch) identifiziert werden und enthält andererseits lineare Teilräume, die algebraisch isomorph zu $l^\infty(\mathbb{N})$ sind (vgl. N.Bourbaki

[3, Ch. I, § 1, ex. 5b]).

Ferner sei $(Y, \mathcal{T})$ ein separierter lokalkonvexer Raum, der einen dichten tonnelierten Teilraum L besitzt, derart daß die Dimension von Y/L gleich der Kardinalität der reellen Zahlen ist. (Man nehme etwa für $(Y, \mathcal{T})$ das Geradenprodukt $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ und für L einen linearen Raum zwischen $\mathbb{K}^{[\mathbb{R}]}$ und $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$, der $\dim(\mathbb{K}^{\mathbb{R}}/L) = \text{card}(\mathbb{R})$ erfüllt; dies ist möglich, da $\dim(\mathbb{K}^{\mathbb{R}}/\mathbb{K}^{[\mathbb{R}]}) \geq \text{card}(\mathbb{R})$ ist. Da $\mathbb{K}^{[\mathbb{R}]}$ tonneliert und dicht in $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ ist, gilt beides auch für L .)

Dann gibt es einen linearen Teilraum Z von $(Y/L)^*$ derart, daß die dualen Paare $\langle \lambda^x, \lambda \rangle$ und $\langle Y/L, Z \rangle$ isomorph sind. Es sei N ein algebraischer Komplementärraum von Z in $(Y/L)^*$, $q: Y \rightarrow Y/L$ kanonisch, $Y' := (Y, \mathcal{T})'$, $Z_1 := \{f \circ q: f \in Z\}$ und $Z_2 := \{f \circ q: f \in N\}$.

Für den separierten lokalkonvexen Raum

$$(X, \mathcal{T}) := (Y, \tau(Y, Y' + Z_1)) \times (Y, \tau(Y, Y' + Z_2))$$

gelten folgende Aussagen:

a) $(X, \beta(X, X'))$ ist nicht tonneliert.

Da $(X, \beta(X, X'))$ topologisch isomorph zu

$(Y, \beta(Y, Y' + Z_1)) \times (Y, \beta(Y, Y' + Z_2))$ ist (G. Köthe [13, p. 290]), genügt es zu zeigen, daß der Faktor $(Y, \beta(Y, Y' + Z_1))$ nicht tonneliert ist. Aus der Annahme, $(Y, \beta(Y, Y' + Z_1))$ sei tonneliert, folgt mit Hilfe von Hilfssatz (5.4) (Anhang) die Tonneliertheit von $(Y/L, \beta(Y/L, Z_1)) = (Y/L, \beta(Y/L, Z))$. Dies steht im Widerspruch zu der Tatsache, daß $(\lambda^x, \beta(\lambda^x, \lambda))$ als starkes Dual eines nicht distinguirten Raums nicht tonneliert ist.

b) $M := \Delta Y$ ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von $(X, \mathcal{T})$, dessen Mackey-Topologie tonneliert ist.

Wegen Hilfssatz (5.1a) ist nämlich $(M, \mathcal{T} \cap M)$ topologisch isomorph zu $(Y, \tau(Y, Y' + Z_1) \vee \tau(Y, Y' + Z_2))$, und man hat:

$$(Y, \tau(Y, Y' + Z_1) \vee \tau(Y, Y' + Z_2))' = Y' + Z_1 + Z_2 = Y' + L^\perp.$$

Mit Hilfe der Folgerung aus Lemma (2.2.1) erhält man, daß

$$\tau(Y, Y' + Z_1 + Z_2) \cap L = \mathcal{T} \cap L \text{ erfüllt ist und daß } \tau(Y, Y' + L^\perp)/L \text{ die feinste lokalkonvexe Topologie auf } Y/L \text{ ist.}$$

Folglich ist $(Y, \tau(Y, Y' + L^\perp))$ tonneliert.

Damit ist auch $(M, \tau(M, M'))$ tonneliert.

M ist abgeschlossen, da $\tau(Y, Y' + Z_1) \wedge \tau(Y, Y' + Z_2)$ separiert ist (vgl. Hilfssatz (5.1a)).

c) Der Quotient $(X/M, \mathcal{T}/M)$ ist topologisch isomorph zu $(Y, \tau(Y, Y' + Z_1) \wedge \tau(Y, Y' + Z_2)) = (Y, \tau(Y, Y')) = (Y, \mathcal{T})$ (Hilfssatz (5.1a)) und aus diesem Grunde tonneliert.

Wir betrachten nun den separierten lokalkonvexen Raum

$X' (= (X, \mathcal{V})')$, versehen mit der Topologie $\mathcal{G}(X', X)$. Es gilt:

d) $(X', \mathcal{G}(X', X))$ ist nicht distinguert, da wegen a) der Raum $(X, \beta(X, X'))$ nicht tonneliert ist.

e) Der Teilraum $L := M^0$ ist ein $\mathcal{G}(X', X)$ -abgeschlossener linearer Teilraum von X' . Sein stetiges Dual ist wegen der $\mathcal{V}$ -Abgeschlossenheit von M gleich X/M . Da $(X/M, \tau(X/M, L)) = (X/M, \mathcal{V}/M)$ wegen c) ein tonnelierter Raum ist, ist $(L, \mathcal{G}(X', X) \cap L)$ halbreflexiv.

f) Der Quotient $(X'/L, \mathcal{G}(X', X)/L)$ ist ebenfalls halbreflexiv, denn sein stetiges Dual ist gleich M und wegen b) ist $\tau(M, M') = \tau(M, X'/L)$ eine tonnelierte Topologie auf M .

Damit ist gezeigt, daß ein nicht distinguierter lokalkonvexer Raum X einen abgeschlossenen linearen Teilraum L besitzen kann, derart daß L und X/L sogar halbreflexiv sind. $\cdot/\cdot$

Wir vermerken folgende positive Aussage als Ergänzung zu Beispiel (2.2.4) und zu der in Satz (2.1.3) und den zugehörigen Beispielen bewiesenen Tatsache, daß ein lokalkonvexer Raum nicht reflexiv zu sein braucht, wenn ein linearer Teilraum und der zugehörige Quotient es sind.

2.2.5 Satz: Ist X ein Fréchet-Raum und $L \subset X$ ein linearer Teilraums, derart daß L und X/L reflexiv sind, so ist auch X reflexiv.

Beweis: Zunächst ist L als metrisierbarer reflexiver Raum vollständig, also abgeschlossen in X .

Da L insbesondere quasitonneiert ist und $(X'/L^0, \beta(X'/L^0, L)) = (X'/L^0, \tau(X'/L^0, L))$ als tonneliertes starkes Dual eines Fréchet-Raums bornologisch ist (G.Köthe [13, p.403]), impliziert N.Bourbaki [3, Ch.IV, § 3, ex.12d], daß

$$\beta(X'/X)/L^0 = \beta(X'/L^0, L) \text{ gilt.}$$

Es sei $q: X \rightarrow X/L$ kanonisch. Ist $y \in X''$, so liegt $y|_{L^0}$ in X/L , denn $(y|_{L^0})$ ist $(\beta(X', X) \cap L^0)$ - stetig und es gilt:

$$\beta(X', X) \cap L^0 \subset \beta(L^0, X/L) = \tau(L^0, X/L) \quad (X/L \text{ ist reflexiv und sein stetiges Dual ist } L^0).$$

Es gibt also $z \in X$ mit $y|_{L^0} = q(z)$. $y-z$ ist dann ein Element von X'' , welches L^0 annulliert.

Wegen $\beta(X', X)/L^0 = \beta(X'/L^0, L) = \tau(X'/L^0, L)$ liegt $y-z$ bereits in L und damit liegt y in X .

Aus der eben bewiesenen Inklusion $X'' \subset X$ folgt die Reflexivität von X , denn X ist als Fréchet-Raum tonneliert. $\cdot/\cdot$

Anmerkungen:

1) Quotienten reflexiver Fréchet-Räume brauchen nicht reflexiv zu sein (G.Köthe [13, § 31.5]), während abgeschlossene lineare Teilräume reflexiver Fréchet-Räume wieder reflexiv sind. Die Umkehrung der Aussage (2.2.5) gilt also nicht.

2) In M.Krein, V.Šmulian [16, p.575, Theorem 14] wird bewiesen, daß ein Banach-Raum reflexiv ist, wenn ein linearer Teilraum und der zugehörige Quotient es sind. Der Beweis von Satz (2.2.5) ist dem dort gegebenen Beweis nachgebildet.

3) Man kann leicht zeigen, daß ein Fréchet-Raum $(X, \mathcal{T})$ ein Montel-Raum ist, wenn ein linearer Teilraum L und der zugehörige Quotient X/L Montel-Räume sind.

Ist nämlich $B \subset X$ beschränkt und abgeschlossen und $q: X \rightarrow X/L$ kanonisch, so ist $q(B)$ präkompakt in $(X/L, \mathcal{T}/L)$. Wegen Hilfsatz (5.6) (Anhang) und der Vollständigkeit von $(X, \mathcal{T})$ gibt es eine kompakte absolutkonvexe Teilmenge K in X mit $q(K) \supset q(B)$.

Es folgt $B \subset K + L$ und hieraus $B \subset K + \overline{L \cap (B + K)}$.

Da L ein Montel-Raum ist und $B + K$ beschränkt ist, ist

$\overline{L \cap (B + K)}$ kompakt. Es folgt die Kompaktheit von B . $\cdot/\cdot$

2.3 Positive Aussagen

In diesem Abschnitt wollen wir für die Eigenschaften abzählbar tonneliert, Schwartz-Raum und nuklear die Vererbbarkeit von Teilraum und Quotient auf den Ausgangsraum beweisen.

2.3.1 Satz: Es sei (X, γ) ein lokalkonvexer Raum, $L \subset X$ sei ein linearer Teilraum, L und X/L seien abzählbar tonneliert. Dann ist auch X abzählbar tonneliert.

Beweis: Es sei $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von absolutkonvexen abgeschlossenen Nullumgebungen in (X, γ) , deren Durchschnitt $U := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ absorbant ist. Es ist zu zeigen, daß U eine Nullumgebung in (X, γ) ist.

Sei hierzu $q: X \rightarrow X/L$ kanonisch.

Ist $V \in \mathcal{U}_0(X, \gamma)$ absolutkonvex, so gilt:

$$q\left(\frac{1}{2} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \cap V\right) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} q(U_n \cap V) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} q(U_n \cap V)^{\gamma/L} \subset \\ \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} q(U_n \cap V). \quad \text{Da } q\left(\frac{1}{2} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \cap V\right) \text{ absorbant in } X/L \text{ ist,} \\ \text{ist } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} q(U_n \cap V)^{\gamma/L} \text{ als absorbanter Durchschnitt einer}$$

Folge absolutkonvexer abgeschlossener Nullumgebungen selbst eine Nullumgebung in dem abzählbar tonnelierten Raum $(X/L, \gamma/L)$;

Damit ist auch $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} q(U_n \cap V)$ eine (γ/L) -Nullumgebung in X/L .

Da $(L, \gamma \cap L)$ abzählbar tonneliert ist, ist $U \cap L = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n \cap L)$ eine $(\gamma \cap L)$ -Nullumgebung in L .

Es gibt also $V \in \mathcal{U}_0(X, \gamma)$ absolutkonvex mit $V \cap L \subset U \cap L$.

Da V eine γ -Nullumgebung ist, ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} q(U_n \cap \frac{1}{2} V)$ eine Nullumgebung in $(X/L, \gamma/L)$, wie oben gezeigt wurde.

Folglich gibt es eine absolutkonvexe Nullumgebung W in (X, γ) mit

$$W \subset \frac{1}{2} V \cap q^{-1}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} q(U_n \cap \frac{1}{2} V)\right) = \frac{1}{2} V \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} ((U_n \cap \frac{1}{2} V) + L).$$

Ist $w \in W$, so gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ ein $u_n \in U_n \cap \frac{1}{2} V$ und $l_n \in L$ mit $w = u_n + l_n$. Wegen $w \in \frac{1}{2} V$ liegt $l_n = w - u_n$ in V und folglich gilt: $w \in U_n \cap \frac{1}{2} V + V \cap L$ ($n \in \mathbb{N}$), d.h.

$$W \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n \cap \frac{1}{2} V + V \cap L) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n \cap V + V \cap L).$$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n \cap V + V \cap L)$ ist als Obermenge der Nullumgebung W selbst eine Nullumgebung in (X, τ) . Aus

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n \cap V + V \cap L) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n \cap V + U \cap L) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n + U) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} 2 U_n = 2 U \quad \text{folgt nun, daß auch } U \text{ eine } \tau\text{-Nullumgebung ist.} \\ \bullet/.$$

2.3.2 Korollar: X und Y seien lokalkonvexe Räume, $f: X \rightarrow Y$ sei linear, offen und fast stetig. Sind Y und Kern f abzählbar tonneliert, so ist auch X abzählbar tonneliert.

(Vgl. hierzu die entsprechende Aussage für die Eigenschaft tonneliert in W. Roelcke [23].)

Beweis: f induziert eine lineare bijektive offene und fast stetige Abbildung $\hat{f}: X/\text{Kern } f \rightarrow Y$, wie man leicht sieht. Auf Grund von Satz (2.3.1) genügt es also, folgende Aussage zu beweisen:

Es sei Z ein $\mathbb{K}$ -linearer Raum, $\tau \supset \tau'$ lokalkonvexe Topologien auf Z ; für jedes $U \in \mathcal{U}_0(X, \tau)$ sei $\bar{U}^{\tau'}$ eine Nullumgebung in (Z, τ') . Ist (Z, τ) abzählbar tonneliert, so ist auch (Z, τ') abzählbar tonneliert.

Zum Beweis sei $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen absolutkonvexen Nullumgebungen in (Z, τ) , deren Durchschnitt U absorbant ist. Da U_n für $n \in \mathbb{N}$ auch eine abgeschlossene Nullumgebung in (Z, τ') ist, ist U eine τ' -Nullumgebung in Z ((Z, τ') ist abzählbar tonneliert). Folglich ist $\bar{U}^{\tau'}$ eine τ' -Nullumgebung in Z . Aus der τ' -Abgeschlossenheit von U folgt die Behauptung. $\bullet/.$

2.3.3 Satz: Es sei (X, τ) ein lokalkonvexer Raum, $L \subset X$ sei ein linearer Teilraum. L und X/L seien Schwartz-Räume. Dann ist auch X ein Schwartz-Raum.

Beweis: Es sei U eine absolutkonvexe Nullumgebung in (X, τ) . Es ist zu zeigen, daß eine Nullumgebung V in (X, τ) so existiert, daß V in dem halbnormierten Raum (X, p_U) präkompakt ist. Sei hierzu $q: X \rightarrow X/L$ kanonisch. Da L ein Schwartz-Raum ist, existieren absolutkonvexe τ' -Null-

umgebungen V_1 und V_2 in X mit $V_2 \subset V_1 \subset U$ so, daß $V_1 \cap L$ präkompakt in (X, p_U) und $V_2 \cap L$ präkompakt in (X, p_{V_1}) ist. Da X/L ein Schwartz-Raum ist, existiert ferner eine absolutkonvexe $\mathcal{F}$ -Nullumgebung V_3 in X mit $V_3 \subset V_2$ so, daß $q(V_3)$ präkompakt in dem halbnormierten Raum $(X, p_{V_2})/L = (X/L, p_{q(V_2)})$ ist.

Für $i = 1, 2$ bezeichne $(\widetilde{X, p_{V_i}})$ die vollständige Hülle von (X, p_{V_i}) , deren Halbnorm mit $\widetilde{p_{V_i}}$ bezeichnet sei.

$\varphi: (\widetilde{X, p_{V_2}}) \longrightarrow (\widetilde{X, p_{V_1}})$ sei eine stetige Fortsetzung von $\text{id}_X: (X, p_{V_2}) \longrightarrow (X, p_{V_1})$; $Z := \widetilde{L}^{\widetilde{p_{V_2}}}$ ist ein vollständiger halbnormierter Teilraum von $(\widetilde{X, p_{V_2}})$; schließlich bezeichne $\mathcal{O}$ die von $\widetilde{p_{V_2}}$ auf $X + Z$ induzierte halbnormierte Topologie.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi: (X, p_{V_2})/L &\longrightarrow (X + Z, \mathcal{O})/Z, \\ x + L &\longmapsto x + Z \quad (x \in X), \end{aligned}$$

ist stetig (vgl. Hilfssatz (5.9) (Anhang)).

Damit ist $\psi(q(V_3))$ als gleichmäßig stetiges Bild einer präkompakten Menge präkompakt in $((X + Z)/Z, \mathcal{O}/Z)$.

Wegen Hilfssatz (5.6) (Anhang) gibt es eine $\mathcal{O}$ -präkompakte Teilmenge P von $X + Z$ mit $V_3 + Z \subset P + Z$.

Z ist gleich $L + \overline{V_2 \cap L}^{\mathcal{O}}$, da Z der $\mathcal{O}$ -Abschluß von L ist und $\overline{V_2 \cap L}^{\mathcal{O}}$ eine $(\mathcal{O}|_Z)$ -Nullumgebung in Z ist. Aus

$$V_3 \subset (P + Z) \cap X = (P + \overline{V_2 \cap L}^{\mathcal{O}} + L) \cap X = (P + \overline{V_2 \cap L}^{\mathcal{O}}) \cap X + L$$

$$\begin{aligned} \text{folgt} \quad V_3 &= \varphi(V_3) \subset (\varphi(P) + \varphi(\overline{V_2 \cap L}^{\mathcal{O}})) \cap X + L \subset \\ &(\varphi(P) + \overline{\varphi(V_2 \cap L)}^{\widetilde{p_{V_1}}}) \cap X + L = (\varphi(P) + \overline{V_2 \cap L}^{\widetilde{p_{V_1}}}) \cap X + L. \end{aligned}$$

$Q := (\varphi(P) + \overline{V_2 \cap L}^{\widetilde{p_{V_1}}}) \cap X$ ist eine p_{V_1} -präkompakte absolutkonvexe Teilmenge von X ; folglich gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $Q \subset n \cdot V_1$.

$$\begin{aligned} \text{Aus } V_3 \subset Q + L \text{ folgt} \quad V_3 &\subset Q + L \cap (V_3 + Q) \subset Q + L \cap (V_3 + n \cdot V_1) \\ &\subset Q + L \cap (n+1) \cdot V_1 = Q + (n+1)(L \cap V_1). \end{aligned}$$

$Q + (n+1)(L \cap V_1)$ ist p_U -präkompakt, also ist auch V_3 präkompakt in (X, p_U) , womit der Satz bewiesen ist. $\cdot/\cdot$

2.3.4 Korollar: X und Y seien lokalkonvexe Räume, $f: X \rightarrow Y$ sei linear, offen und fast stetig. Sind Y und Kern f Schwartz-Räume, dann ist auch X ein Schwartz-Raum.

Beweis: Wie bei Korollar (2.3.2) sieht man, daß es auf Grund von Satz (2.3.3) genügt, folgende Aussage zu beweisen:

Es sei Z ein $\mathbb{K}$ -linearer Raum, $\tau \supset \sigma$ lokalkonvexe Topologien auf Z ; für jedes $U \in \mathcal{U}_0(X, \tau)$ sei $\bar{U}^\sigma$ eine Nullumgebung in (Z, σ) . Ist (Z, τ) ein Schwartz-Raum, so ist auch (Z, σ) ein Schwartz-Raum.

Zum Beweis sei $V \in \mathcal{U}_0(Z, \sigma)$ absolutkonvex; da (Z, τ) ein Schwartz-Raum ist, gibt es eine τ -Nullumgebung $W \subset V$ in Z derart, daß W in dem halbnormierten Raum (Z, p_V) präkompakt ist. $\bar{W}^\tau$ ist eine σ -Nullumgebung in Z ; da p_V eine gröbere Topologie als σ auf Z erzeugt, ist $\bar{W}^\tau$ in $\bar{W}^{p_V}$ enthalten. Da $\bar{W}^{p_V}$ präkompakt in (Z, p_V) ist, ist somit auch $\bar{W}^\tau$ präkompakt in (Z, p_V) .

$\cdot/\cdot$

2.3.5 Satz: Es sei (X, τ) ein lokalkonvexer Raum und $L \subset X$ ein linearer Teilraum; L und X/L seien nuklear. Dann ist auch X nuklear.

Beweis: Es sei $U \in \mathcal{U}_0(X, \tau)$ absolutkonvex.

Wir zeigen, daß eine absolutkonvexe Nullumgebung V in X so existiert, daß jede p_V -summierbare Folge in X absolutsummierbar in (X, p_U) ist.

Sei hierzu $q: X \rightarrow X/L$ kanonisch.

Da L nuklear ist, existiert zunächst eine absolutkonvexe τ -Nullumgebung $U_1 \subset U$ derart, daß jede $(p_{U_1}|_L)$ -summierbare Folge in L absolutsummierbar in (X, p_U) ist.

Da X/L nuklear ist, existiert ferner eine absolutkonvexe τ -Nullumgebung $U_2 \subset U_1$ derart, daß jede summierbare Folge in $(X, p_{U_2})/L$ absolutsummierbar in $(X, p_{U_1})/L$ ist.

Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine p_{U_2} -summierbare Folge in X . Dann ist

$(q(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ summierbar in $(X, p_{U_2})/L$ und damit $(q(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ absolutsummierbar in $(X, p_U)/L$.

Bezeichnet $\hat{p}_{U_1}$ die von p_{U_1} auf X/L induzierte Halbnorm, so hat man folglich

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{p}_{U_1}(q(x_n)) < \infty.$$

Da definitionsgemäß $\hat{p}_{U_1}(q(x)) = \inf \{p_{U_1}(y) : q(x) = q(y)\}$ gilt, gibt es eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit $q(y_n) = q(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) und

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} p_{U_1}(y_n) < \infty.$$

Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als p_{U_2} -summierbare Folge insbesondere p_{U_1} -summierbar ist, ist $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine p_{U_1} -summierbare Folge in L , die nach Wahl von U_1 absolutsummierbar in (X, p_U) ist.

Weiter erhält man:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} p_U(x_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} p_U(x_n - y_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}} p_U(y_n) \leq$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} p_U(x_n - y_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}} p_{U_1}(y_n) < \infty, \text{ d.h.}$$

die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist absolutsummierbar in (X, p_U) , womit der

Satz bewiesen ist. $\cdot/\cdot$

2.4 Zur Vererbbarkeit der Eigenschaft lokalkonvex

Am Beginn von § 2 wurde erwähnt, daß für die Eigenschaften 2-4, 10 und 22 die Vererbbarkeit von Teilraum und dem zugehörigen Quotienten auf den Ausgangsraum aus der Literatur bekannt ist. In 2.1 und 2.2 wurde an Hand von Gegenbeispielen die Nichtvererbbarkeit in dieser Situation für die Eigenschaften 5, 7 - 9, 11 - 13, 16 - 21 gezeigt; in 2.3 wurde die Vererbbarkeit für 6, 23 und 24 bewiesen; die Nichtvererbbarkeit von 14 und 15 in dieser Situation folgt trivialerweise aus der Tatsache, daß das Produkt zweier B-vollständiger Räume nicht B_T -vollständig zu sein braucht, wie am Ende von 0.2 bereits erwähnt wurde. Es bleibt also noch die Frage zu behandeln, ob ein topologischer linearer Raum lokalkonvex ist, wenn ein linearer Teilraum und der zugehörige Quotient lokalkonvex sind.

In diesem Abschnitt wird lediglich eine äquivalente Umformung dieses Problems durchgeführt. Das Problems selbst bleibt, wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, offen.

Folgender Satz reduziert zunächst die Frage auf den Spezialfall eines eindimensionalen Teilraums.

2.4.1 Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- A) Es existiert ein nicht lokalkonvexer topologischer linearer Raum (X, τ) mit linearem Teilraum $L \subset X$ derart, daß L und X/L lokalkonvex sind.
- B) Es existiert ein nicht lokalkonvexer topologischer linearer Raum (Y, σ) und $a \in Y$ derart, daß $Y/[a]$ lokalkonvex ist.

Beweis: Aus B) folgt offenbar A).

Wir zeigen: $\text{non}(B)$ impliziert $\text{non}(A)$.

Sei hierzu (X, τ) ein topologischer linearer Raum, der einen linearen Teilraum L besitzt, so daß L und X/L lokalkonvex sind. Es ist zu zeigen, daß (X, τ) lokalkonvex ist. Wir können hierbei o.E. voraussetzen, daß L abgeschlossen und X separiert ist. Wie in 0.1 vereinbart, bezeichne $\mathcal{K}_1$ die zu einer linearen Topologie $\mathcal{K}$ auf einem $\mathbb{K}$ -linearen Raum Z assoziierte lokalkonvexe Topologie.

a) Wir setzen zunächst (X, τ) (zusätzlich) als metrisierbar voraus. Es gilt: $\tau \supset \tau_1$, $\tau/L = (\tau/L)_1 = \tau_1/L$ (Hilfssatz (5.7) (Anhang)), $\tau \cap L \supset \tau_1 \cap L$.

Wir zeigen, daß $\mathcal{T} \cap L = \mathcal{T}_1 \cap L$ gilt; Hilfssatz (5.8) liefert dann die Gleichheit von $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}_1$.

Da $\mathcal{T}$ metrisierbar ist, ist $\mathcal{T}_1$ halbmétrisierbar; ist nämlich $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{T}$ -Nullumgebungsbasis, so ist $(\bigcap U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{T}_1$ -Nullumgebungsbasis in X . $(L, \mathcal{T}_1 \cap L)$ ist folglich ein Mackey-Raum. Daher genügt es zu zeigen, daß $(L, \mathcal{T} \cap L)' \subset (L, \mathcal{T}_1 \cap L)'$ erfüllt ist.

Sei also $f \in (L, \mathcal{T} \cap L)' \setminus \{0\}$ und $N := \text{Kern } f \subset L$. Da L/N ein-dimensionaler linearer Teilraum von $(X/N, \mathcal{T}/N)$ ist und der Quo-tient $(X/N)/(L/N)$ topologisch isomorph zu $(X/L, \mathcal{T}/L)$, also lokalkonvex ist, impliziert $\text{non}(B)$, daß $(X/N, \mathcal{T}/N)$ selbst lokalkonvex ist. Wegen $\mathcal{T}_1/N = (\mathcal{T}/N)_1 = \mathcal{T}/N$ (Hilfssatz (5.7)) ist N abgeschlossen in $(X, \mathcal{T}_1)$. Damit ist $f \in (L, \mathcal{T}_1 \cap L)'$.

b) Es sei jetzt $(X, \mathcal{T})$ ein beliebiger topologischer linearer Raum und $U_0 \in \mathcal{U}_0(X, \mathcal{T})$ kreisförmig.

Es ist zu zeigen, daß U_0 auch eine $\mathcal{T}_1$ -Nullumgebung in X ist.

Es gibt $U_1 \in \mathcal{U}_0(X, \mathcal{T})$ kreisförmig mit

$$1) U_1 + U_1 \subset U_0,$$

$$2) U_1 \cap L \text{ ist absolutkonvex.}$$

Ferner existiert $U_2 \in \mathcal{U}_0(X, \mathcal{T})$ kreisförmig mit

$$1') U_2 + U_2 \subset U_1$$

$$2') U_2 + L \text{ ist absolutkonvex.}$$

Bew.: Es gibt $V_2 \in \mathcal{U}_0(X, \mathcal{T})$ kreisförmig mit $V_2 + V_2 \subset U_1$ und $W_2 \in \mathcal{U}_0(X, \mathcal{T})$ so, daß $W_2 + L$ absolutkonvex und in $V_2 + L$ ent-halten ist. $U_2 := V_2 \cap (W_2 + L)$ erfüllt 1') und 2'), denn

$$U_2 + L = V_2 \cap (W_2 + L) + L = W_2 + L. \quad \cdot/.$$

So fortfahrend erhält man eine Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von kreisförmigen $\mathcal{T}$ -Nullumgebungen in X mit

$$1'') U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$2'') U_{2n-1} \cap L \text{ ist absolutkonvex} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$3'') U_{2n} + L \text{ ist absolutkonvex} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullumgebungsbasis einer eindeutig bestimmten halb-métrisierbaren linearen Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit folgenden Eigen-schaften: $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}$, $(L, \mathcal{T} \cap L)$ und $(X/L, \mathcal{T}/L)$ sind lokalkonvex.

Aus Teil a) des Beweises folgt, daß $(X, \mathcal{T})$ lokalkonvex ist.

Damit enthält die $\mathcal{T}$ -Nullumgebung U_0 eine absolutkonvexe $\mathcal{T}$ -Null-umgebung U , die wegen $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}$ auch eine $\mathcal{T}$ -Nullumgebung ist, d.h.

$$U_0 \in \mathcal{U}_0(X, \mathcal{T}_1). \quad \cdot/.$$

Folgender Satz liefert eine weitere Reduktion des Problems in 2.4.

2.4.2 Satz: Die Aussage B) aus Satz (2.4.1) ist zu folgender Aussage äquivalent:

C) Es existiert ein nicht lokalkonvexer vollständiger metrisierbarer topologischer linearer Raum $(Z, \mathcal{R})$ und $b \in Z$ derart, daß $(Z/[b], \mathcal{R}/[b])$ lokalkonvex ist.

Beweis: Es ist nur " B) $\implies$ C) " zu zeigen.

Sei also $(Y, \mathcal{T})$ ein nicht lokalkonvexer topologischer linearer Raum, $a \in Y$ und $(Y/[a], \mathcal{T}/[a])$ lokalkonvex.

Hieraus folgt insbesondere, daß a nicht in $\overline{\{0\}}^{\mathcal{T}}$ enthalten ist. Dann gibt es eine Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von kreisförmigen $\mathcal{T}$ -Nullumgebungen in Y mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $a \notin U_1, U_1 \notin \mathcal{U}_0(Y, \mathcal{T}_1)$,
- 2) $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n \quad (n \in \mathbb{N})$,
- 3) $U_n + [a]$ ist absolutkonvex $(n \in \mathbb{N})$.

(Der Beweis ist analog zu der Konstruktion in Teil b) des Beweises von Satz (2.4.1).)

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmt genau eine lineare halbmetrisierbare Topologie $\mathcal{T}_1$ auf Y mit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Nullumgebungsbasis.

a liegt nicht in $\overline{\{0\}}^{\mathcal{T}_1}$, $\mathcal{T}_1$ ist gröber als $\mathcal{T}$ und nicht lokalkonvex, denn U_1 umfaßt keine konvexe $\mathcal{T}$ -Nullumgebung, also auch keine konvexe $\mathcal{T}_1$ -Nullumgebung. Der Quotient $(Y/[a], \mathcal{T}_1/[a])$ ist offenbar lokalkonvex. Durch Übergang zum assoziierten separierten Raum erhält man also einen nicht lokalkonvexen metrisierbaren Raum $(Z, \mathcal{R})$ mit einem $b \in Z$, so daß $(Z/[b], \mathcal{R}/[b])$ lokalkonvex ist. Die vollständige Hülle $\widetilde{Z}$ besitzt dann die geforderten Eigenschaften, denn $Z/[b]$ ist dichter lokalkonvexer linearer Teilraum von $\widetilde{Z}/[b]$. $\cdot/\cdot$

Man erhält nun folgende äquivalente Form des Problems in 2.4:

2.4.3 Satz: Die Eigenschaft lokalkonvex vererbt sich genau dann von Teilraum und Quotient auf den Ausgangsraum, wenn die assoziierte lokalkonvexe Topologie einer dichten Hyperebene eines vollständigen metrisierbaren topologischen linearen Raums nie eine Fréchet-Raum-Topologie ist.

Beweis:

Die Eigenschaft lokalkonvex vererbt sich nicht von Teilraum und Quotient auf den Ausgangsraum. Auf Grund von Satz (2.4.1) und Satz (2.4.2) gibt es dann einen nicht lokalkonvexen vollständigen metrisierbaren topologischen linearen Raum $(Y, \mathcal{T})$ und $a \in Y$, so daß $Y/[a]$ lokalkonvex ist.

Wir zeigen: Ist H ein algebraischer Komplementärraum von $[a]$ in Y , so ist $(H, \mathcal{T}_1 \cap H)$ topologisch isomorph zu $(Y/[a], \mathcal{T}/[a])$. Mit Hilfssatz (5.7a) folgt dann, daß auch $(H, (\mathcal{T} \cap H)_1)$ topologisch isomorph zu $(Y/[a], \mathcal{T}/[a])$ und damit ein Fréchet-Raum ist.

Zunächst ist $\mathcal{T}_1 \cap [a]$ die grösste Topologie auf $[a]$. Andernfalls wäre $\mathcal{T} \cap [a] = \mathcal{T}_1 \cap [a]$ und $\mathcal{T}/[a] = (\mathcal{T} \cap [a])_1 = \mathcal{T}_1/[a]$ (Hilfssatz (5.7b)); aus $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$ würde mit Hilfssatz (5.8) dann die Gleichheit von $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}$ folgen, was der Wahl von $(Y, \mathcal{T})$ widerspricht. Es folgt: $(Y, \mathcal{T}_1) = ([a], \mathcal{T}_1 \cap [a]) \oplus (H, \mathcal{T}_1 \cap H)$; damit hat man: $(H, \mathcal{T}_1 \cap H) \cong (Y/[a], \mathcal{T}_1/[a]) = (Y/[a], \mathcal{T}/[a])$.

Es sei nun andererseits $(Y, \mathcal{T})$ ein vollständiger metrisierbarer topologischer linearer Raum, $H \subset Y$ eine dichte Hyperebene und $(\mathcal{T} \cap H)_1$ eine Fréchet-Raum-Topologie auf H .

$(Y, \mathcal{T})$ ist dann offenbar nicht lokalkonvex.

Wegen $\mathcal{T}_1 \cap H = (\mathcal{T} \cap H)_1$ (Hilfssatz (5.7a)), $H^{\mathcal{T}_1} = Y$ und der Vollständigkeit von $(\mathcal{T} \cap H)_1$ gibt es ein $a \in Y \setminus H$ derart, daß $(Y, \mathcal{T}_1)$ topologisch direkte Summe von $(H, (\mathcal{T} \cap H)_1)$ und $[a]$, versehen mit der grössten Topologie $\mathcal{T}_g$, ist.

$\text{id}_{Y/[a]}: (Y/[a], \mathcal{T}/[a]) \longrightarrow (Y/[a], \mathcal{T}_1/[a])$ ist also ein stetiger Isomorphismus zwischen zwei vollständigen metrisierbaren topologischen linearen Räumen, also wegen des Open-Mapping-Theorems ein topologischer Isomorphismus.

Es folgt, daß $(Y/[a], \mathcal{T}/[a])$ lokalkonvex ist, während $(Y, \mathcal{T})$ nach Voraussetzung nicht lokalkonvex ist. $\cdot/\cdot$

2.4.4 Anmerkung: Es ist nicht schwierig, einen unvollständigen metrisierbaren topologischen linearen Raum Y anzugeben, dessen assoziierte lokalkonvexe Topologie vollständig und metrisierbar ist. (In dem folgenden Beispiel ist $\dim(\tilde{Y}/Y)$ unendlich).

Sei hierzu X ein $\mathbb{K}$ -linearer Raum, $\mathcal{T}$ eine metrisierbare lineare Topologie auf X mit $(X, \mathcal{T})' = \{0\}$ und $Y \subset X^*$ ein linearer Teil-

raum derart, daß $(X, \mathcal{G}(X, Y))$ vollständig und metrisierbar ist. Diese Situation ist realisierbar, denn $L_p(0, 1)$ ($0 < p < 1$) besitzt dichte lineare Teilräume X , deren Dimension gleich der Kardinalität der reellen Zahlen ist; jeder solche Raum X ist algebraisch isomorph zu dem Geradenprodukt $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, das in seiner kanonischen schwachen Topologie vollständig und metrisierbar ist; die von $L_p(0, 1)$ auf X induzierte Topologie $\mathcal{T}$ ist metrisierbar und hat triviales stetiges Dual (vgl. G.Köthe [13, p.162]).

Zunächst gilt: $\mathcal{T} \wedge \mathcal{G}(X, Y)$ ist die grösste Topologie auf X . Jede abgeschlossene Nullumgebung U in $(X, \mathcal{T} \wedge \mathcal{G}(X, Y))$ enthält nämlich einen endlich kodimensionalen linearen Teilraum L von X , der wegen $(X, \mathcal{T})' = \{0\}$ $\mathcal{T}$ -dicht in X ist; man erhält nun:
 $U \supset \overline{L}^{\mathcal{T} \wedge \mathcal{G}(X, Y)} \supset \overline{L}^{\mathcal{T}} = X$.

Aus Hilfssatz (5.1a) folgt nun, daß ΔX ein dichter linearer Teilraum des metrisierbaren topologischen linearen Raums $(X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{G}(X, Y))$ ist; ΔX ist topologisch isomorph zu $(X, \mathcal{T} \vee \mathcal{G}(X, Y))$. Wir zeigen, daß die zu $\mathcal{T} \vee \mathcal{G}(X, Y)$ assoziierte lokalkonvexe Topologie auf X gleich $\mathcal{G}(X, Y)$ ist.

Es sei $U \in \mathcal{U}_0(X, \mathcal{T} \vee \mathcal{G}(X, Y))$ absolutkonvex. Dann gibt es $V \in \mathcal{U}_0(X, \mathcal{T})$ und $W \in \mathcal{U}_0(X, \mathcal{G}(X, Y))$ mit $U \supset V \cap W$. W umfaßt einen $\mathcal{G}(X, Y)$ -abgeschlossenen endlich kodimensionalen linearen Teilraum M von X . Wegen $(M, \mathcal{T} \cap M)' = \{0\}$ ist die konvexe Hülle von $V \cap M$ gleich M . Aus $U \supset V \cap M$ und der Konvexität von U folgt, daß M in U enthalten ist. Ist P ein (endlich dimensionaler) algebraischer Komplementärraum von M in X , so ist $(X, \mathcal{G}(X, Y))$ die topologisch direkte Summe von M und P . Aus $U \cap M = M$ und $U \cap P \in \mathcal{U}_0(P)$ folgt daher $U \in \mathcal{U}_0(X, \mathcal{G}(X, Y))$.

Die Inklusion $\mathcal{G}(X, Y) \subset (\mathcal{T} \vee \mathcal{G}(X, Y))_1$ ist trivialerweise erfüllt. $(\Delta X, (\mathcal{T} \times \mathcal{G}(X, Y)) \cap \Delta X)$ ist also ein unvollständiger metrisierbarer topologischer linearer Raum, dessen assoziierte lokalkonvexe Topologie eine Fréchet-Raum-Topologie ist.

Ferner gilt: Ist $N \subset (X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{G}(X, Y))$ ein linearer Teilraum mit $N \not\supseteq \Delta X$, so besitzt N in seiner Relativtopologie kein separierendes stetiges Dual.

Bew.: Wegen $N \not\supseteq \Delta X$ gibt es $a \in X \setminus \{0\}$ mit $(a, 0) \in N$; wegen $\overline{N}^{\mathcal{T} \times \mathcal{G}(X, Y)} = X \times X$ besitzt jedes $f \in N'$ eine stetige Fortsetzung $\hat{f} \in (X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{G}(X, Y))'$; aus $(X, \mathcal{T})' = \{0\}$ folgt

$$0 = \hat{f}(a, 0) = f(a, 0).$$

Wählt man den Teilraum N so, daß $\dim(N/\Delta X) = 1$ erfüllt ist, und $a \in X \setminus \{0\}$ mit $(a, 0) \in N$, so gilt weiter:

$[(a, 0)]$ und $N/[(a, 0)]$ besitzen separierendes stetiges Dual.

Hierzu genügt es wegen Hilfssatz (5.7b) zu zeigen, daß

$(N, ((\mathbb{F} \times \mathcal{C}(X, Y)) \cap N)_1)$ topologisch direkte Summe von $(\Delta X, ((\mathbb{F} \times \mathcal{C}(X, Y)) \cap \Delta X)_1)$ und $[(a, 0)]$ versehen mit der größten Topologie ist. Dies folgt aber unmittelbar aus Hilfssatz (5.7a) und der Tatsache, daß jedes stetige lineare Funktional auf N im Punkt $(a, 0)$ verschwindet.

Hiermit hat man ein Beispiel, daß ein topologischer linearer Raum i.a. auch dann kein separierendes stetiges Dual besitzt, wenn ein linearer Teilraum und der zugehörige Quotient separierendes stetiges Dual besitzen.

2.5 Anmerkung

Es sei (X, τ) ein lokalkonvexer Raum, $L \subset X$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Haben (X, τ) und $(X/L, \tau/L)$ gewisse "schöne" Eigenschaften, so impliziert dies i.a. wenig für $(L, \tau \cap L)$. Hierzu sei ein Beispiel angeführt, in dem X Bairesch ist, X/L ein Hilbert-Raum und L nicht einmal tonneliert.

In W. Roelcke u.a. [25,1.] wird gezeigt, daß der Hilbert-Raum $l^2(\mathbb{N})$ einen abgeschlossenen unendlich dimensional linearen Teilraum M_1 mit dichtem Komplementärraum K besitzt, derart daß K Bairesch ist. Da M_1 separabel ist, besitzt M_1 einen dichten abzählbar dimensional linearen Teilraum L , der in seiner Relativtopologie nicht tonneliert ist (vgl. N.Bourbaki [3, Ch.III, § 1, ex.4]). Es sei $N := K + L$. Dann ist N in der von $l^2(\mathbb{N})$ induzierten Topologie Bairesch, da K in N dicht ist; L ist ein abgeschlossener nicht tonnelierter linearer Teilraum von N . Der Quotient N/L ist auf Grund von Hilfssatz (5.9) (Anhang) topologisch isomorph zu $(N + M_1)/M_1 = l^2(\mathbb{N})/M_1$ und damit ein Hilbert-Raum. ./.

§ 3. Vererbbarkeit auf spezielle projektive Limiten

Da jeder projektive Limes separierter topologischer linearer Räume $(X_i)_{i \in I}$ als abgeschlossener linearer Teilraum von $\prod_{i \in I} X_i$ aufgefaßt werden kann (W. Roelcke [24, II, p.35]), vererben sich die Eigenschaften 1, 10 - 13, 17, 19, 23 und 24 auf beliebige projektive Limiten separierter Räume; 2 vererbt sich auf abzählbare projektive Limiten.

Für die restlichen Eigenschaften in 0.2 ist Vererbbarkeit auf projektive Limiten nicht zu erwarten, und in mehreren Fällen bereits durch Gegenbeispiele in der Literatur belegt. Im folgenden soll untersucht werden, wie sich diese restlichen Eigenschaften bei der Bildung spezieller projektiver Limiten verhalten.

3.1 Die obere Grenze einer aufsteigenden Folge von linearen Topologien

Es sei X ein $\mathbb{K}$ -linearer Raum, $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von linearen Topologien auf X , (X, τ_n) besitze eine Eigenschaft E ($n \in \mathbb{N}$). Es soll untersucht werden, ob dann auch X , versehen mit der oberen Grenze $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \tau_n$ die Eigenschaft E besitzt.

Vorbemerkung: Es sei E eine Eigenschaft lokalkonvexer Räume, die "abzählbar quasitonneliert" impliziert und die sich auf abzählbare lokalkonvexe direkte Summen vererbt. Auf Grund der Implikationsübersicht in 0.2 erfüllen dies z.B. die Eigenschaften 4 - 9, 16, 18, 21. X sei ein $\mathbb{K}$ -linearer Raum und $\tau \supset \tau'$ verschiedene separierte lokalkonvexe Topologien auf X , die beide E besitzen.

Auf $Y := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X$ sind dann die separierten lokalkonvexen Topologien

$$\tau_n := \bigoplus_{1 \leq k \leq n} \tau \oplus \bigoplus_{k > n} \tau' \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ definiert, die alle } E$$

besitzen. Die Folge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist aufsteigend. Lemma (1.3.2) sagt aus, daß die obere Grenze $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \tau_n$ nicht abzählbar quasitonneliert ist, folglich E nicht besitzt.

Wählen wir speziell $X := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, τ die Produkttopologie auf $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, τ' die feinste lokalkonvexe Topologie auf X , so sind (X, τ') und (X, τ) beide ultrabornologische Montel-Räume, besitzen also die

Eigenschaften 4 - 9, 16, 18. Um 21 zu belegen kann man vergleichbare verschiedene Normtopologien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ etwa auf dem abzählbar dimensionalen Raum $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ betrachten.

Damit ist bereits die Nichtvererbbarkeit der Eigenschaften 4 - 9, 16, 18, 21 auf die obere Grenze einer aufsteigenden Folge von lokalkonvexen Topologien bewiesen.

Die folgenden Gegenbeispiele (3.1.1) und (3.1.2) zeigen, daß man diese Aussage auch mit Hilfe von Lemma (2.2.1) erhalten kann.

3.1.1 Gegenbeispiel für Montel-Raum

Es seien $(X, \mathcal{T})$ und L wie in (2.2.2), d.h. $(X, \mathcal{T})$ ist ein separierter tonnelierter Raum, dessen beschränkte Teilmengen endlich dimensional sind, und L ein abzählbar unendlich kodimensionaler dichter linearer Teilraum von X .

Es sei $q: X \rightarrow X/L$ die Quotientenabbildung und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine algebraische Basis in X/L .

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $f_m \in (X/L)^*$ durch $f_m(x_n) := \delta_{mn}$ ($n \in \mathbb{N}$) definiert.

Wir zeigen, daß $\mathcal{T}_n := \mathcal{T}(X, X' + [f_m \circ q: 1 \leq m \leq n])$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Montel-Raum-Topologie auf X ist.

Sei hierzu $L_n := \bigcap_{1 \leq m \leq n} \text{Kern}(f_m \circ q)$. Da L_n endliche Kodimension in dem tonnelierten Raum $(X, \mathcal{T})$ hat und die $\mathcal{T}$ -beschränkten Teilmengen von X endlich dimensional sind, ist $(L_n, \mathcal{T} \cap L_n)$ ein Montel-Raum, also insbesondere ein Mackey-Raum. Wegen $L_n \supset L$ ist L_n dicht in $(X, \mathcal{T})$. Mit der Folgerung aus Lemma (2.2.1) erhält man:

$\mathcal{T}_n \cap L_n = \mathcal{T} \cap L_n$ ist eine Montel-Raum-Topologie auf L_n . Da L_n abgeschlossen und endlich kodimensional in $(X, \mathcal{T}_n)$ ist, folgt hieraus, daß $(X, \mathcal{T}_n)$ als topologisch direkte Summe von L_n und einem endlich dimensional linearen Teilraum selbst ein Montel-Raum ist.

Die Folge $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist offenbar aufsteigend. Sei $\mathcal{T} := \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$.

$(X, \mathcal{T})$ ist nicht abzählbar quasitonneiert. Andernfalls wäre $(X, \mathcal{T})$ sogar abzählbar tonneiert, denn die $\mathcal{T}$ -beschränkten Mengen sind wegen $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}$ endlich dimensional. Wegen $L = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_n = \mathbb{I}^{\mathcal{T}}$ wäre dann $\mathcal{T}/L$ gleich der feinsten lokalkonvexen Topologie auf X/L

(M. De Wilde, C. Houet [7, Corollary 3]), im Widerspruch zu $(X/L, \mathcal{T}/L)' = [f_n: n \in \mathbb{N}]$. $\cdot/\cdot$

3.1.2 Gegenbeispiel für DF-Raum

Es seien $(X, \mathcal{T})$ und M wie in (2.2.3), d.h. $(X, \mathcal{T})$ ist ein vollständiger ultrabornologischer DF-Raum, $M \subset X$ ein abzählbar unendlich kodimensionaler dichter linearer Teilraum und es gilt: $\dim((M + [B])/M) < \infty$ für jede $\mathcal{T}$ -beschränkte Teilmenge B von X . Es sei $q: X \rightarrow X/M$ die Quotientenabbildung und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine algebraische Basis in X/M .

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $f_m \in (X/M)^*$ durch $f_m(x_n) := \delta_{mn}$ ($n \in \mathbb{N}$) definiert. Wir zeigen, daß $\mathcal{T}_n := \tau(X, X' + [f_m \circ q: 1 \leq m \leq n])$ für $n \in \mathbb{N}$ eine bornologische tonnelierte DF-Raum-Topologie auf X ist.

Sei hierzu $M_n := \bigcap_{1 \leq m \leq n} \text{Kern}(f_m \circ q)$. Da M_n endliche Kodimension in dem ultrabornologischen DF-Raum $(X, \mathcal{T})$ hat, ist $(M_n, \mathcal{T} \cap M_n)$ ein bornologischer tonnelierter DF-Raum, also insbesondere ein Mackey-Raum. Wegen $M_n \supset M$ ist M_n dicht in $(X, \mathcal{T})$. Mit der Folgerung aus Lemma (2.2.1) erhält man: $\mathcal{T}_n \cap M_n = \mathcal{T} \cap M_n$ ist eine tonnelierte bornologische DF-Raum-Topologie auf M_n . Da M_n abgeschlossen und endlich kodimensional in $(X, \mathcal{T}_n)$ ist, folgt hieraus, daß $(X, \mathcal{T}_n)$ als topologisch direkte Summe von M_n und einem endlich dimensionalen linearen Teilraum selbst ein bornologischer tonnelierter DF-Raum ist.

Die Folge $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist offenbar aufsteigend. Sei $\mathcal{T} := \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$.

Wir zeigen, daß $(X, \mathcal{T})$ nicht abzählbar quasitonnektiert ist. Zunächst ist $(X, \mathcal{T})$ kein DF-Raum. Aus $(X/M, \mathcal{T}/M)' = [f_n: n \in \mathbb{N}]$ folgt nämlich, daß $\mathcal{T}/M = \mathcal{G}(X/M, [f_n: n \in \mathbb{N}])$ metrisierbar, aber nicht normierbar, also kein DF-Raum ist (G. Köthe [13, p. 396 (2)]). Ein Quotient eines DF-Raums ist aber wieder DF-Raum (loc. cit., p. 404).

Als nächstes zeigen wir, daß $(X, \mathcal{T})$ eine Fundamentalfolge der beschränkten Mengen besitzt. Damit ist dann die Behauptung bewiesen. Sei hierzu $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Fundamentalfolge der $\mathcal{T}$ -beschränkten

Teilmengen von X sowie $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Kobasis von M in X .
 Wegen $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}$ ist jede $\mathcal{T}$ -beschränkte Teilmenge B von X auch $\mathcal{T}$ -beschränkt und deswegen in $M + [y_m: 1 \leq m \leq n]$ für ein $n = n(B) \in \mathbb{N}$ enthalten. Wegen $M = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k = \overline{M}^{\mathcal{T}}$ ist die Summe $M + [y_m: 1 \leq m \leq n]$ topologisch direkt. Damit ist B in einer Menge der Form $A_{m,k,n} := B_m \cap M + k \cdot [y_m: 1 \leq m \leq n]$ ($m, k, n \in \mathbb{N}$) enthalten. Jedes $A_{m,k,n}$ ($m, k, n \in \mathbb{N}$) ist andererseits eine $\mathcal{T}$ -beschränkte Teilmenge von X , denn wegen $\mathcal{T}_n \cap M = \mathcal{T} \cap M$ ($n \in \mathbb{N}$) ist $\mathcal{T} \cap M = \mathcal{T} \cap M$. Offenbar ist also die Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $A_n := A_{n,n,n}$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Fundamentalfolge der beschränkten Mengen in $(X, \mathcal{T})$. $\cdot/\cdot$

3.1.3 Gegenbeispiel für Mackey-Raum

(Vgl. Beispiele zu Satz (1.3.1), S. 25/26.)

Es sei $K := [-1, +1]^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $Y := [K]$, versehen mit der von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ induzierten Topologie. (Offenbar ist $Y = l^{\infty}(\mathbb{N})$ und K die abgeschlossene Einheitskugel von $l^{\infty}(\mathbb{N})$.) Ferner sei L ein abzählbar unendlich kodimensionaler dichter linearer Teilraum von Y und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Kobasis von L in Y . Für $n \in \mathbb{N}$ sei $L_n := L + [y_m: 1 \leq m \leq n]$ und $\mathcal{T}_n := \tau(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, L_n)$. Die Mackey-Topologien $\mathcal{T}_n$ auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ sind separiert und die Folge $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist aufsteigend.

Die obere Grenze $\mathcal{T} := \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ist keine Mackey-Topologie. Wegen $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ gilt nämlich:

$$\tau(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, Y) \supset \mathcal{T} \supset \sigma(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, Y).$$

K ist $\sigma(Y, \mathbb{R}^{(\mathbb{N})})$ -kompakt und absolutkonvex, also ist $K^0 \subset \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ eine $\tau(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, Y)$ -Nullumgebung; K^0 ist aber keine $\mathcal{T}$ -Nullumgebung, denn K ist in keinem der Räume L_n ($n \in \mathbb{N}$) enthalten. $\cdot/\cdot$

3.1.4 Gegenbeispiel für distinguiert und halbnormierbar

(Vgl. Beispiele zu Satz (1.3.1), S. 24.)

Es sei $(Z, \mathcal{T})$ der bereits erwähnte nicht distinguierte und folglich nicht halbnormierbare Fréchet-Raum aus G.köthe [13, p.438], dessen Topologie durch eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Normen auf Z mit

$p_{n+1} \geq p_n$ ($n \in \mathbb{N}$) gegeben ist.

Nach W. Roelcke [24,p.29] ist die nicht halbnormierbare nicht distinguerte lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}$ die obere Grenze der durch p_n ($n \in \mathbb{N}$) auf Z definierten Normtopologien.

Wegen $p_{n+1} \geq p_n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist die Folge aufsteigend. Jeder normierte Raum ist distinguert, da sein starkes Dual als Banach-Raum tonneliert ist. $\cdot/\cdot$

3.2 Der Durchschnitt einer absteigenden Folge von linearen Teilräumen eines topologischen linearen Raums

Es sei (X, τ) ein topologischer linearer Raum, $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine absteigende Folge abgeschlossener linearer Teilräume von X ;

$(L_n, \tau \cap L_n)$ besitze eine Eigenschaft E ($n \in \mathbb{N}$).

Es soll untersucht werden, ob dann auch $L := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_n$ die Eigenschaft E besitzt.

Da sich die Eigenschaften 1-3, 10-15, 17, 19, 23 und 24 auf abgeschlossene lineare Teilräume vererben, genügt es die restlichen Eigenschaften aus 0.2 zu betrachten.

Wir beweisen zunächst folgendes Lemma:

3.2.1 Lemma: Es sei (X, τ) ein lokalkonvexer Raum, $L \subsetneq X$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Dann gilt:

L ist genau dann der Durchschnitt von abzählbar vielen abgeschlossenen Hyperebenen in (X, τ) , wenn $((X/L)', \mathcal{G}((X/L)', X/L))$ separabel ist.

(Vgl. W. Roelcke u.a. [25, 2].)

Beweis: Es sei zunächst $((X/L)', \mathcal{G}((X/L)', X/L))$ separabel.

Es ist $L^0 \neq \{0\}$. Nach Voraussetzung gibt es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^0 \subset X'$ mit $L^0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [f_n]_{\mathcal{G}(X', X)}$, denn $(L^0, \mathcal{G}(X', X) \cap L^0)$ und

$((X/L)', \mathcal{G}((X/L)', X/L))$ sind in kanonischer Weise topologisch isomorph (G.Köthe [13, p.280]). Wegen $L^0 \neq \{0\}$ können wir $f_n \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) voraussetzen. Mit dem Bipolarensatz folgt:

$L = L^{00} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [f_n]^0$. $[f_n]^0$ ist eine abgeschlossene Hyperebene in (X, τ) für $n \in \mathbb{N}$.

Es sei jetzt L der Durchschnitt von abzählbar vielen abgeschlossenen Hyperebenen in (X, τ) . Dann gibt es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^0 \subset X'$ mit $L = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Kern } f_n$. $\mathcal{G}(X/L, [f_n: n \in \mathbb{N}])$ ist eine separierte lokalkonvexe Topologie auf X/L , die gröber als $\mathcal{G}(X/L, L^0) = \mathcal{G}(X, X')/L$ ist. Folglich ist der abzählbar dimensionale lineare Teilraum $[f_n: n \in \mathbb{N}]$ dicht in $(L^0, \mathcal{G}(X', X) \cap L^0)$. Damit sind $(L^0, \mathcal{G}(X', X) \cap L^0)$ und $((X/L)', \mathcal{G}((X/L)', X/L))$ separabel. $\cdot/\cdot$

3.2.2 Anwendungen:

a) Nach G.Köthe [13, p.437] gibt es einen Fréchet-Montel-Raum (X, τ) derart, daß $(X', \beta(X', X))$ einen abgeschlossenen linearen Teilraum L enthält, der in seiner Relativtopologie kein DF-Raum ist. Da $(X', \beta(X', X))$ als starkes Dual eines Fréchet-Raums eine Fundamentalfolge der beschränkten Mengen besitzt, ist L auch nicht abzählbar quasitonneliert.

Da $\tau(X, X')$ als Fréchet-Montel-Raum-Topologie separabel und metrisierbar ist (G.Köthe [13, § 27, 2.(5)]), ist auch $(L^0, \mathfrak{G}(L^0, X'/L))$ separabel. Auf Grund von Lemma (3.2.1) ist L der Durchschnitt von abzählbar vielen $\beta(X', X)$ -abgeschlossenen Hyperebenen in X' , und damit Durchschnitt einer absteigenden Folge $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von abgeschlossenen endlich kodimensionalen linearen Teilräumen in $(X', \beta(X', X))$. $(X', \beta(X', X))$ ist als starkes Dual eines Fréchet-Montel-Raums ein ultrabornologischer Montel-DF-Raum; jedes L_n besitzt als abgeschlossener endlich kodimensionaler linearer Teilraums dieselben Eigenschaften.

Mit Hilfe der Implikationsübersicht in 0.2 erhält man also, daß sich die Eigenschaften 4 - 9, 16, 18, 21 nicht auf den Durchschnitt einer absteigenden Folge von abgeschlossenen linearen Teilräumen vererben.

b) Wir betrachten wieder den nicht distinguerten separablen Fréchet-Raum (Z, τ) aus (3.1.4). Z kann als abgeschlossener linearer Teilraum eines abzählbaren Produkts Y von separablen normierten Räumen aufgefaßt werden. Y ist offenbar distinguert und separabel. Da Y/Z metrisierbar und separabel ist, folgt aus G.Köthe [13, § 21, 3(5)], daß $((Y/Z)', \mathfrak{G}((Y/Z)', Y/Z))$ separabel ist. Lemma (3.2.1) impliziert nun, daß Z der Durchschnitt einer absteigenden Folge von abgeschlossenen endlich kodimensionalen linearen Teilräumen in Y ist, die offenbar alle distinguert sind.

c) Der separierte Mackey-Raum $(l^\infty, \tau(l^\infty, l^1))$ besitzt einen abgeschlossenen linearen Teilraum H mit $\tau(H, H') \neq \tau(l^\infty, l^1) \cap H$ (G.Köthe [13, § 22, 4(3)]). Da $(l^1, \beta(l^1, l^\infty))$ ein separabler Banach-Raum ist, ist auch $(H^0, \mathfrak{G}(H^0, l^\infty/H))$ separabel. Mit Hilfe von Lemma (3.2.1) folgt, daß H der Durchschnitt einer absteigenden

Folge von abgeschlossenen endlich kodimensionalen linearen Teilräumen von $(l^\infty, \tau(l^\infty, l^1))$ ist, die offenbar alle Mackey-Räume sind. . ./.

Anmerkung: Die Frage nach der Vererbbarkeit von Eigenschaften auf spezielle induktive Limiten ist in gewisser Weise dual zu der Fragestellung in § 3. Diese Situation ist aber bereits hinreichend gut untersucht (u.a. N. Bourbaki [3] und G.Köthe [13]).

§ 4. Vertauschbarkeit gewisser Finalprozesse.

Es sei E eine Eigenschaft lokalkonvexer Räume, die sich von einer Familie lokalkonvexer Räume $((X_i, \tau_i))_{i \in I}$ auf die lokalkonvexe Finaltopologie auf einem linearen Raum X bezüglich einer Familie linearer Abbildungen $f_i: (X_i, \tau_i) \rightarrow X$ ($i \in I$) vererbt. Ferner besitze jeder lineare Raum mit der feinsten lokalkonvexen Topologie die Eigenschaft E . (Die Eigenschaften 4 - 9 aus 0.2 erfüllen z.B. diese Voraussetzungen.) Ist dann (X, τ) ein beliebiger lokalkonvexer Raum, so ist die lokalkonvexe untere Grenze τ^E aller lokalkonvexen Topologien σ auf X , die feiner als τ sind und E besitzen, offenbar die größte lokalkonvexe Topologie auf X , die feiner als τ ist und E besitzt. τ^E wird hier die zu τ bezüglich E assoziierte Topologie genannt.

Es liegt die Frage nahe, ob die Bildung einer derartigen assoziierten Topologie und die Bildung lokalkonvexer Finaltopologien mit einander vertauschbar sind.

Da die Frage nach Vertauschbarkeit in diesem Sinne nur für Eigenschaften E sinnvoll ist, die sich auf lokalkonvexe Finaltopologien vererben, kann man diese Vertauschbarkeit als eine Verschärfung der Vererbbarkeit betrachten.

In den folgenden beiden Abschnitten wird für die Eigenschaften 4 - 9 in 0.2 die Vertauschbarkeit der Bildung der assoziierten Topologie mit der Bildung spezieller lokalkonvexer Finaltopologien untersucht.

4.1 Die lineare untere Grenze zweier lokalkonvexer Topologien

Es sei X ein $\mathbb{K}$ -linearer Raum, σ und τ lokalkonvexe Topologien auf X . Es soll die Frage untersucht werden, ob $(\sigma \wedge \tau)^E$ gleich $\sigma^E \wedge \tau^E$ ist.

4.1.1 Beispiel: Es seien (X, τ) und L wie in (2.2.2), d.h. (X, τ) ist ein tonnelierter separierter Raum, dessen beschränkte Teilmengen endlich dimensional sind, und $L \subset X$ ein dichter abzählbar unendlich kodimensionaler linearer Teilraum.

Es sei $q: X \rightarrow X/L$ die Quotientenabbildung und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine algebraische Basis in X/L .

Für $m \in \mathbb{N}$ seien f_m und g_m aus $(X/L)^*$ durch

$$f_m(x_n) := \delta_{mn} \quad \text{und} \quad g_m(x_n) := \frac{1}{m^2(n-1)} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{definiert.}$$

Durch eine einfache Rechnung erhält man, daß $F := [f_m : m \in \mathbb{N}]$ und $G := [g_m : m \in \mathbb{N}]$ $\mathcal{G}((X/L)^*, X/L)$ -dichte lineare Teilräume von $(X/L)^*$ sind, die $F \cap G = \{0\}$ erfüllen.

Es seien $\mathcal{T}_1 := \tau(X, X' + \{f \circ q : f \in F\})$ und

$$\mathcal{T}_2 := \tau(X, X' + \{g \circ q : g \in G\}).$$

Es gilt: $\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2 = \tau(X, (X' + \{f \circ q : f \in F\}) \cap (X' + \{g \circ q : g \in G\})) = \tau(X, X') = \mathcal{T}$, denn die lineare untere Grenze zweier Mackey-Topologien ist eine Mackey-Topologie.

Wir zeigen, daß für $i = 1, 2$ X versehen mit der zu $\mathcal{T}_i$ assoziierten abzählbar quasitonnelierten Topologie $\check{\mathcal{T}}_i$ topologisch direkte Summe von $(L, \mathcal{T} \cap L)$ und einem algebraischen Komplementärraum M von L in X ist, wobei M die feinste lokalkonvexe Topologie trägt.

Zunächst erhält man mit der Folgerung aus Lemma (2.2.1), daß

$L^{\mathcal{T}_i} = L$ und $\mathcal{T}_i \cap L = \mathcal{T} \cap L$, denn $(L, \mathcal{T} \cap L)$ ist als abzählbar kodimensionaler linearer Teilraum eines tonnelierten Raums tonneliert, also ein Mackey-Raum (M.Valdivia [28, Theorem 3]). Da die direkte Summentopologie $(\mathcal{T} \cap L) \oplus \tau(M, M^*)$ als tonnelierte Topologie insbesondere abzählbar quasitonneliert ist und auch feiner als $\mathcal{T}_i$ ist, ist sie feiner als $\check{\mathcal{T}}_i$.

Ist andererseits $\mathcal{T}$ eine abzählbar quasitonnelierte Topologie auf X mit $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{T} \subset (\mathcal{T} \cap L) \oplus \tau(M, M^*)$, so ist $\mathcal{T}$ sogar abzählbar tonneliert, da die $\mathcal{T}$ -beschränkten Mengen endlich dimensional sind; ferner ist L $\mathcal{T}$ -abgeschlossen. Aus M.De Wilde, C.Houet [7, Corollary 3] folgt dann, daß in $(X, \mathcal{T})$ jeder algebraische Komplementärraum von L bereits topologischer Komplementärraum ist und die feinste lokalkonvexe Topologie trägt.

Aus $\mathcal{T} \cap L = \mathcal{T}_i \cap L = \mathcal{T} \cap L$ erhält man nun $\mathcal{T} = (\mathcal{T} \cap L) \oplus \tau(M, M^*) = \check{\mathcal{T}}_i$.

Insbesondere ist $\check{\mathcal{T}}_i$ gleich der zu $\mathcal{T}_i$ assoziierten tonnelierten Topologie auf X . Ferner gilt: $\check{\mathcal{T}}_1 \wedge \check{\mathcal{T}}_2 = \check{\mathcal{T}}_1 \neq \mathcal{T}$; $\mathcal{T}$ ist nach Voraussetzung tonneliert.

Dies ist ein Beispiel, daß die Bildung der linearen unteren Grenze nicht mit der Bildung der bezüglich der Eigenschaften 4 - 7 assoziierten Topologie kommutiert.

Betrachtet man den Produktraum $(X \times X, \check{\tau}_1 \times \check{\tau}_2)$ und den $(\check{\tau}_1 \times \check{\tau}_2)$ -abgeschlossenen linearen Teilraum ΔX , so gewinnt man ein Beispiel dafür, daß für die Eigenschaften 4 - 7 die Bildung von Quotienten (nach einem abgeschlossenen linearen Teilraum) und die Bildung der assoziierten Topologie nicht mit einander kommutieren.

Zum Beweis ist zunächst die zu $\check{\tau}_1 \times \check{\tau}_2$ assoziierte Topologie für $E \in \{4, 5, 6, 7\}$ gleich $\check{\tau}_1 \times \check{\tau}_2$, wie man sich leicht überlegt.

Mit Hilfssatz (5.1a) erhält man dann:

$((X \times X)/\Delta X, (\check{\tau}_1 \times \check{\tau}_2)/\Delta X)$ ist topologisch isomorph zu

$(X, \check{\tau}_1 \wedge \check{\tau}_2) = (X, \check{\tau})$, also tonneliert,

$((X \times X)/\Delta X, (\check{\tau}_1 \times \check{\tau}_2)/\Delta X)$ ist topologisch isomorph zu

$(X, \check{\tau}_1 \wedge \check{\tau}_2) = (X, \check{\tau}_1) \neq (X, \check{\tau})$. $\cdot/\cdot$

4.1.2 Beispiel: Es seien $(X, \check{\tau})$, M und $Y \subset (X/M)^*$ wie in (2.2.3), d.h. $(X, \check{\tau})$ ist ein separierter ultrabornologischer Raum, $M \subset X$ ein dichter abzählbar unendlich kodimensionaler linearer Teilraum, der $\dim((M + [B])/M) < \infty$ für jede beschränkte Teilmenge B von $(X, \check{\tau})$ erfüllt, und $Y \subset (X/M)^*$ ein linearer Teilraum derart, daß $(X/M, \tau(X/M, Y))$ ein Prä-Hilbert-Raum ist. Ferner sei N ein algebraischer Komplementärraum von Y in $(X/M)^*$.

Offenbar ist N nicht der Nullraum. $q: X \rightarrow X/M$ bezeichne die Quotientenabbildung.

Es seien $\check{\tau}_1 := \tau(X, X' + \{f \circ q: f \in Y\})$ und

$\check{\tau}_2 := \tau(X, X' + \{f \circ q: f \in N\})$.

Es gilt: $\check{\tau}_1 \wedge \check{\tau}_2 = \tau(X, (X' + \{f \circ q: f \in Y\}) \cap (X' + \{f \circ q: f \in N\})) = \tau(X, X') = \check{\tau}$, denn die lineare untere Grenze zweier Mackey-Topologien ist eine Mackey-Topologie.

Wir zeigen, daß X versehen mit der zu $\check{\tau}_1$ assoziierten bornologischen Topologie $\check{\tau}_1^x$ topologisch direkte Summe von $(M, \check{\tau} \cap M)$ und einem algebraischen Komplementärraum P von M in X ist, wobei P die feinste lokalkonvexe Topologie trägt.

Zunächst erhält man mit der Folgerung aus Lemma (2.2.1), daß

$\overline{M}^{\check{\tau}_1} = M$ und $\check{\tau}_1 \cap M = \check{\tau} \cap M$ erfüllt ist, denn $(M, \check{\tau} \cap M)$ ist als abzählbar kodimensionaler linearer Teilraum eines ultrabornologischen Raums tonneliert und bornologisch, also insbesondere ein Mackey-Raum (N.Valdivia [28, Theorem 3] und [29, Corollary 1.3]).

Da die direkte Summentopologie $(\gamma \cap M) \oplus \tau(P, P^*)$ bornologisch und feiner als γ_1 ist, ist sie auch feiner als γ_1^x . Ist $B \subset X$ γ_1 -beschränkt, so gibt es $A \subset M$ γ -beschränkt und eine endlich dimensionale beschränkte Teilmenge C von X mit $B \subset A + C$, denn $\dim((M + [B])/M) < \infty$ und $M = \overline{M}^{\gamma}$. B ist also auch $((\gamma \cap M) \oplus \tau(P, P^*))$ -beschränkt.

Es folgt: $\gamma_1^x = (\gamma \cap M) \oplus \tau(P, P^*)$.

Da $\gamma \not\subseteq \gamma_2 \subset (\gamma \cap M) \oplus \tau(P, P^*)$ erfüllt ist (hierbei wird wieder die Folgerung aus Lemma (2.2.1) benutzt), erhält man:

Die zu γ_2 assoziierte bornologische Topologie γ_2^x ist gröber als γ_1^x und echt feiner als γ .

Damit hat man: $\gamma_1^x \wedge \gamma_2^x = \gamma_2^x \neq \gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2$.

Da (X, γ) ultrabornologisch ist, ist dies ein Beispiel, daß die Bildung der linearen unteren Grenze nicht mit der Bildung der bezüglich der Eigenschaften 8, 9 assoziierten Topologie kommutiert.

Wie in Beispiel (4.1.1) erhält man auch hier die entsprechende Aussage für die Bildung von Quotienten nach einem abgeschlossenen linearen Teilraum. $\cdot/\cdot$.

4.1.3 Als Ergänzung zu (4.1.1) und (4.1.2) sei noch folgendes Beispiel vermerkt.

Der lineare Teilraum $\mathbb{R}^{(\mathbb{R})}$ des Geradenprodukts $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist in der von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ induzierten Topologie bornologisch (V.Eberhardt [8, p.8, 1.6 Korollar]); die assoziierte tonnelierte Topologie auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{R})}$ ist die feinste lokalkonvexe, denn jede beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ($= (\mathbb{R}^{(\mathbb{R})})^*$) liegt im Abschluß einer beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}^{(\mathbb{R})}$ ($= (\mathbb{R}^{(\mathbb{R})})'$).

Für $Y := \mathbb{R}^{(\mathbb{R})} + \{(1)_{r \in \mathbb{R}}\}$ versehen mit der von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ induzierten Topologie γ gilt dann:

(Y, γ) ist quasitonneliert, denn $\mathbb{R}^{(\mathbb{R})}$ ist als bornologischer Raum quasitonneliert und dicht in (Y, γ) .

Die assoziierte tonnelierte Topologie γ^t auf Y ist die feinste lokalkonvexe Topologie auf Y .

γ^t induziert nämlich auf der Hyperebene $\mathbb{R}^{(\mathbb{R})}$ eine tonnelierte Topologie, die feiner als $\gamma \cap \mathbb{R}^{(\mathbb{R})}$ ist; $\gamma^t \cap \mathbb{R}^{(\mathbb{R})}$ ist also die feinste lokalkonvexe Topologie auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{R})}$, die vollständig ist, d.h. $\mathbb{R}^{(\mathbb{R})}$ ist γ^t -abgeschlossen. Damit ist (Y, γ^t)

topologisch direkte Summe von $(\mathbb{R}^{(\mathbb{R})}, \tau(\mathbb{R}^{(\mathbb{R})}, \mathbb{R}^{\mathbb{R}}))$ und einer Geraden.

Y versehen mit der zu $\mathcal{V}$ assoziierten bornologischen Topologie $\mathcal{V}^*$, ist topologisch isomorph zu $(\mathbb{R}^{(\mathbb{R})}, \mathcal{V} \cap \mathbb{R}^{(\mathbb{R})}) \oplus [(1)_{r \in \mathbb{R}}]$, denn $\mathbb{R}^{(\mathbb{R})}$ ist eine bornologische folgenabgeschlossene Hyperebene in $(Y, \mathcal{V})$.

Damit gilt: $\mathcal{V}^t \wedge \mathcal{V}^* = \mathcal{V}^* \neq \mathcal{V}$.

Die assoziierte quasitonnelierte Topologie auf einem lokalkonvexen Raum ist also i.a. verschieden von der linearen unteren Grenze der assoziierten tonnelierten und der assoziierten bornologischen Topologie.

4.2 Der strikte induktive Limes

Es sei $(X, \mathcal{V})$ lokalkonvexer strikter induktiver Limes einer aufsteigenden Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von linearen Teilräumen von X . Es soll die Frage untersucht werden, ob $(X, \mathcal{V}^E)$ der lokalkonvexe induktive Limes der Folge $(X_n, (\mathcal{V} \cap X_n)^E)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

4.2.1 Beispiel: Es sei X ein abzählbar unendlich dimensionaler $\mathbb{K}$ -linearer Raum. X kann in kanonischer Weise als linearer Teilraum von X^{**} aufgefaßt werden und ist $\mathcal{G}(X^{**}, X^*)$ -dicht darin. Ferner sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine unendlich dimensionale Nullfolge in dem Geradenprodukt $(X^{**}, \mathcal{G}(X^{**}, X^*))$ mit $X \cap [x_n: n \in \mathbb{N}] = \{0\}$.

$Y := X \dot{+} [x_n: n \in \mathbb{N}]$ versehen mit der von $\mathcal{G}(X^{**}, X^*)$ induzierten Topologie $\mathcal{V}$ ist dann der strikte induktive Limes der aufsteigenden Folge der linearen Teilräume

$(Y_n, \mathcal{V}_n) := (X \dot{+} [x_m: 1 \leq m \leq n], \mathcal{V} \cap (X \dot{+} [x_m: 1 \leq m \leq n]))$, denn X ist $\mathcal{V}$ -dicht in Y (vgl. den Beweis von Hilfssatz (5.3), Folgerung 2). Die zu $\mathcal{V}_n$ assoziierte bornologische Topologie $\mathcal{V}_n^*$ ist gleich der feinsten lokalkonvexen Topologie $\tau(Y_n, Y_n^*)$ auf Y_n , denn wegen $\mathcal{V} \cap X = \mathcal{G}(X, X^*)$ sind die $(\mathcal{V} \cap X)$ -beschränkten Teilmengen von X endlich dimensional, und damit wegen $\dim(Y_n/X) < \infty$ auch die $\mathcal{V}_n$ -beschränkten Teilmengen von Y_n endlich dimensional.

Auch die zu $\mathcal{V}_n$ assoziierte abzählbar quasitonnelierte Topologie ist gleich $\tau(Y_n, Y_n^*)$. Ist nämlich $\mathcal{T}_n$ eine abzählbar quasitonnelierte Topologie auf Y_n mit $\mathcal{T}_n \supset \mathcal{V}_n$, so ist $(Y_n, \mathcal{T}_n)$ sogar

abzählbar tonneliert, da die $\mathcal{V}_n$ -beschränkten Teilmengen von Y_n endlich dimensional sind. Da Y_n abzählbar dimensional ist, folgt aus M. De Wilde, C. Houet [7, Corollary 3], daß $\mathcal{V}_n$ gleich der feinsten lokalkonvexen Topologie auf Y_n ist.

Das induktive System $((Y_n, \mathcal{V}_n^*))_{n \in \mathbb{N}}$ ist strikt und hat den lokalkonvexen induktiven Limes $(Y, \tau(Y, Y^*))$.

Die zu $\mathcal{V}$ assoziierte bornologische Topologie $\mathcal{V}^*$ ist von $\tau(Y, Y^*)$ verschieden, da $\{x_n: n \in \mathbb{N}\}$ eine unendlich dimensionale $\mathcal{V}$ -beschränkte Teilmenge von Y ist.

Die zu $\mathcal{V}$ assoziierte abzählbar quasitonnelierte Topologie ist größer als $\mathcal{V}^*$ und damit ebenfalls von $\tau(Y, Y^*)$ verschieden.

Dieses Beispiel zeigt, daß die Bildung der assoziierten bornologischen, der assoziierten quasitonnelierten und der assoziierten abzählbar quasitonnelierten Topologie nicht mit der Bildung des strikten lokalkonvexen induktiven Limes einer aufsteigenden Folge von linearen Teilräumen vertauschbar ist.

Anmerkung: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\tau(Y_n, Y_n^*)$ offenbar die feinste lokalkonvexe Topologie auf Y_n , die mit $\mathcal{V}_n$ auf den $\mathcal{V}_n$ -kompakten Teilmengen übereinstimmt.

Die feinste lokalkonvexe Topologie auf Y , die auf den $\mathcal{V}$ -kompakten Teilmengen von Y mit $\mathcal{V}$ übereinstimmt, ist von $\tau(Y, Y^*)$ verschieden, da $\{x_n: n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ eine unendlich dimensionale $\mathcal{V}$ -kompakte Teilmenge von Y ist. Obiges Beispiel gibt somit eine negative Antwort auf eine von H. Porta in [11, p. 94, 1.7 problem] gestellte Frage.

4.2.2 Beispiel: Es sei $((X_n, \mathcal{V}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Banach-Räumen $(X_n, \mathcal{V}_n)$ mit $\mathcal{V}_n \supset \mathcal{V}_{n+1} \cap X_n$, deren starkes Dual $(X'_n, \beta(X'_n, X_n))$ separabel ist ($n \in \mathbb{N}$).

Der lokalkonvexe induktive Limes $(X, \mathcal{V}) = \lim \text{ind } (X_n, \mathcal{V}_n)$ sei ferner unvollständig und separiert.

(Hierzu betrachte man etwa den unvollständigen LB-Raum von G. Köthe [13a, § 31.6]; in diesem Beispiel sind die X_n topologisch isomorph zu $c_0(\mathbb{N})$.)

Dann existiert eine separierte tonnelierte Topologie $\mathcal{T}$ auf X , die echt größer als $\mathcal{V}$ ist. Ist nämlich $a \in (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{V}}) \setminus X$ und $q: X + [a] \rightarrow (X + [a])/[a]$ die Quotientenabbildung, so ist

$q|X$ ein stetiger, aber nicht offener Isomorphismus von (X, τ) auf den separierten tonnelierten Raum $((X + [a])/[a], (\tilde{\tau} \cap (X + [a]))/[a])$.

$\tilde{\tau} := (q|X)^{-1}((\tilde{\tau} \cap (X + [a]))/[a])$ ist folglich tonneliert, separiert und echt gröber als τ .

$(X, \tilde{\tau})$ ist der strikte lokalkonvexe induktive Limes der lokalkonvexen Räume $((X_n, \tau \cap X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ (M. Valdivia [28, Corollary 1.5]).

Wir zeigen, daß die zu $\tau \cap X_n$ assoziierte abzählbar tonnelierte Topologie gleich γ_n ist ($n \in \mathbb{N}$).

Damit ist dann auch die zu $\tau \cap X_n$ assoziierte tonnelierte Topologie gleich der Banach-Raum-Topologie γ_n .

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{R}_n$ eine separierte abzählbar tonnelierte Topologie auf X_n mit $\mathcal{R}_n \subset \gamma_n$. Da der Banach-Raum $(X'_n, \beta(X'_n, X_n))$ separabel ist, ist jede Teilmenge von X'_n insbesondere separabel in der Topologie $\mathcal{G}(X'_n, X_n)$. Damit ist in dem linearen Teilraum

$Z_n := (X_n, \mathcal{R}_n)' \subset X'_n$ insbesondere jede $\mathcal{G}(Z_n, X_n)$ -beschränkte Teilmenge $\mathcal{G}(Z_n, X_n)$ -separabel. Da $(X_n, \mathcal{R}_n)$ abzählbar tonneliert ist, ist die $\mathcal{G}(Z_n, X_n)$ -abgeschlossene absolutkonvexe Hülle jeder $\mathcal{G}(Z_n, X_n)$ -beschränkten Folge in Z_n gleichgradig stetig, also ist jede $\mathcal{G}(Z_n, X_n)$ -beschränkte Teilmenge von Z_n gleichgradig stetig. Es folgt, daß $(X_n, \mathcal{R}_n)$ tonneliert ist.

Da γ_n eine Banach-Raum-Topologie ist und $\mathcal{R}_n \subset \gamma_n$ gilt, liefert das Open-Mapping-Theorem die Gleichheit von $\mathcal{R}_n$ und γ_n .

Man hat somit:

$$\lim \text{ind} (X_n, \gamma_n) = (X, \tau) \neq (X, \tilde{\tau}) = \lim \text{ind} (X_n, \tau \cap X_n).$$

Dieses Beispiel zeigt, daß die Bildung der assoziierten tonnelierten und der assoziierten abzählbar tonnelierten Topologie nicht mit der Bildung des lokalkonvexen strikten induktiven Limes einer aufsteigenden Folge von linearen Teilräumen vertauschbar ist. $\cdot/\cdot$.

§ 5. Anhang: Hilfssaussagen

In diesem Faragraphen werden einige Hilfssätze formuliert und bewiesen, die in den Paragraphen 1 bis 4 benötigt wurden.

5.1 Hilfssatz (W. Roelcke, unveröffentlichtes Manuskript, 1970)

Es sei X ein $\mathbb{K}$ -linearer Raum, $\mathcal{T}$ und $\mathcal{V}$ lineare Topologien auf X .

Dann gilt:

a) Die folgenden Abbildungen sind topologische Isomorphismen

$$\varphi_1: (\Delta X, (\mathcal{T} \times \mathcal{V}) \cap \Delta X) \longrightarrow (X, \mathcal{T} \vee \mathcal{V}), \quad (x, x) \longmapsto x \quad (x \in X),$$

$$\varphi_2: (\Delta_- X, (\mathcal{T} \times \mathcal{V}) \cap \Delta_- X) \longrightarrow (X, \mathcal{T} \vee \mathcal{V}), \quad (x, -x) \longmapsto x \quad (x \in X),$$

$$\psi_1: ((X \times X) / \Delta X, (\mathcal{T} \times \mathcal{V}) / \Delta X) \longrightarrow (X, \mathcal{T} \wedge \mathcal{V}),$$

$$(x, y) + \Delta X \longmapsto x - y \quad (x, y \in X),$$

$$\psi_2: ((X \times X) / \Delta_- X, (\mathcal{T} \times \mathcal{V}) / \Delta_- X) \longrightarrow (X, \mathcal{T} \wedge \mathcal{V}),$$

$$(x, y) + \Delta_- X \longmapsto x + y \quad (x, y \in X).$$

b) Ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{V}$ und $Z \subset X$ ein linearer Teilraum, so ist

$(X \times Z, \mathcal{T} \times (\mathcal{V} \cap Z))$ topologisch direkte Summe der linearen Teilräume $X \times \{0\}$ und ΔZ .

Beweis:

Die Abbildungen φ_i, ψ_i ($i = 1, 2$) sind offenbar algebraische Isomorphismen.

Ist $\mathcal{U}_0$ eine Nullumgebungsbasis aus kreisförmigen Mengen in $(X, \mathcal{T})$ und $\mathcal{W}_0$ eine Nullumgebungsbasis aus kreisförmigen Mengen in $(X, \mathcal{V})$, so ist $(U \cap V)_{(U, V) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{W}_0}$ eine Nullumgebungsbasis in $(X, \mathcal{T} \vee \mathcal{V})$ und $(U + V)_{(U, V) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{W}_0}$ eine Nullumgebungsbasis in $(X, \mathcal{T} \wedge \mathcal{V})$. Wegen

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1((U \times V) \cap \Delta X) &= U \cap V = \varphi_2((U \times V) \cap \Delta_- X) \\ \psi_1(U \times V + \Delta X) &= U + V = \psi_2(U \times V + \Delta_- X) \end{aligned} \right\} \quad (U, V) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{W}_0$$

sind die Abbildungen φ_i, ψ_i ($i = 1, 2$) auch topologisch. Damit ist a) bewiesen.

Ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{V}$ und $Z \subset X$ ein linearer Teilraum, so ist wegen a)

$\varphi_1|_{\Delta Z}: (\Delta Z, (\mathcal{T} \times \mathcal{V}) \cap \Delta Z) \longrightarrow (Z, \mathcal{V} \cap Z)$ ein topologischer Isomorphismus. Bezeichnet $q: X \times Z \longrightarrow (X \times Z) / (X \times \{0\})$ die Quotientenabbildung und

$\xi: (Z, \mathcal{V} \cap Z) \longrightarrow ((X \times Z) / (X \times \{0\}), (\mathcal{T} \times (\mathcal{V} \cap Z)) / (X \times \{0\}))$ den kanonischen topologischen Isomorphismus, so ist wegen

$q|_{\Delta Z} = \xi \circ \varphi_1|_{\Delta Z}$ die Einschränkung $q|_{\Delta Z}: \Delta Z \longrightarrow (X \times Z) / (X \times \{0\})$

topologisch. Das bedeutet, daß $X \times \{0\}$ und ΔZ topologisch direkte Summanden in $(X \times Z, \tau \times (\tau \cap Z))$ sind. $\cdot/\cdot$.

5.2 Hilfssatz: Es sei (X, τ) ein Semi-Montel-Raum und $y \in \tilde{X}$; dann ist auch $(X + [y], \tilde{\tau} \cap (X + [y]))$ ein Semi-Montel-Raum.

Beweis:

Wir können o.E. voraussetzen, daß (X, τ) separiert ist und y in $\tilde{X} \setminus X$ liegt.

Sei $B \subset X + [a]$ absolutkonvex, beschränkt und abgeschlossen in $(X + [y], \tilde{\tau} \cap (X + [y]))$ und $b \in B \setminus X$.

Wir zeigen, daß B kompakt ist.

Jedenfalls ist $C := B \cap X + \{\lambda b : |\lambda| \leq 1\}$ eine kompakte Teilmenge von $X + [y]$. Aus $C \subset B + B = 2B$ folgt $[C] \subset [B]$.

Ist andererseits $x \in B$, so gibt es $x_1 \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $x = x_1 + \lambda b$; aus $x = \lambda b + (x - \lambda b) \in \lambda C + [(1 + \lambda) B] \cap X \subset [C]$ folgt $x \in [C]$, d.h. $[B] \subset [C]$.

Die identische Abbildung $\text{id}_{[B]} : ([B], p_C) \longrightarrow ([B], p_B)$ ist wegen $C \subset 2B$ stetig. $([B], p_C)$ ist ein Banach-Raum, da C kompakt ist. Wenn wir zeigen, daß $([B], p_B)$ ebenfalls ein Banach-Raum ist, so impliziert das Open-Mapping-Theorem (siehe auch G.Köthe [13, p.172(7)]) die Offenheit von $\text{id}_{[B]} : ([B], p_C) \longrightarrow ([B], p_B)$; es gibt somit $\delta > 0$ so, daß $B \subset \delta C$ und aus der Kompaktheit von C folgt dann die Kompaktheit von B .

Um die Vollständigkeit von $([B], p_B)$ zu beweisen, genügt es wegen G.Köthe [13, p.253(2)] die Folgenvollständigkeit von $(B, \tilde{\tau} \cap B)$ zu zeigen.

Sei hierzu $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(B, \tilde{\tau} \cap B)$ und $b_n = x_n + \lambda_n b$ mit $x_n \in X$, $\lambda_n \in \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$). Es können zwei Fälle eintreten:

1) Es existiert $\lambda > 0$ mit $|\lambda_n| \leq \lambda$ ($n \in \mathbb{N}$).

Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in dem Semi-Montel-Raum (X, τ) und deswegen relativ kompakt. Da die Menge $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt ist, ist auch die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ relativ kompakt in $X + [y]$, besitzt also als Cauchy-Folge einen Limes in $X + [y]$.

2) Es gibt eine Teilfolge $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lambda_{m_n} \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) und

$\lim_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_{m_n}| = \infty$. Dann gilt: $b_{m_n} = \lambda_{m_n} \left(\frac{1}{\lambda_{m_n}} x_{m_n} + b \right)$ ($n \in \mathbb{N}$).

Die Folge $\left(\frac{1}{\lambda_{m_n}} x_{m_n} + b \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine Nullfolge in $X + [y]$.

Damit ist b Limes der Folge $(-\frac{1}{\lambda_{m_n}} x_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ im Widerspruch zu der Tatsache, daß (X, τ) insbesondere folgenvollständig ist. $\cdot/\cdot$

5.3 Hilfssatz: Ist (X, τ) ein tonnelierter separierter Raum mit $\tau \neq \tau(X, X^*)$, so besitzt X einen dichten unendlich kodimensionalen linearen Teilraum.

Beweis:

Wir nehmen an, jeder dichte lineare Teilraum von X sei endlich kodimensional. Aus dieser Annahme folgt unmittelbar, daß jeder lineare Teilraum von X höchstens endlich kodimensional in seinem τ -Abschluß ist.

Es sei $(x_i)_{i \in I}$ eine algebraische Basis in X . Für $i \in I$ sei $e^i \in X^*$ durch $e^i(x_k) := \delta_{ik}$ ($k \in I$) definiert.

Wir zeigen zunächst, daß die Menge $\{i \in I : e^i \notin X'\}$ endlich ist. Andernfalls gäbe es eine abzählbar unendliche Teilmenge $J \subset I$ mit $e^i \notin X'$ für $i \in J$. Da der lineare Teilraum

$L := [x_i : i \in I \setminus J]$ endlich kodimensional in seinem τ -Abschluß ist, gibt es $i_m \in J$ ($1 \leq m \leq n$) derart, daß

$L \subset \bar{L} \subset L + [x_{i_m} : 1 \leq m \leq n]$. Da $\dim((L + [x_{i_m} : 1 \leq m \leq n])/\bar{L}) < \infty$, ist $L + [x_{i_m} : 1 \leq m \leq n]$ abgeschlossen in (X, τ) . Jeder Quotient

eines tonnelierten Raums nach einem abgeschlossenen abzählbar kodimensionalen linearen Teilraum trägt die feinste lokalkonvexe Topologie (N.Bourbaki [3, Ch.III, § 1, ex.4]).

Wendet man diese Aussage auf (X, τ) und $L + [x_{i_m} : 1 \leq m \leq n]$ an, so folgt: $e^i \in X'$ für $i \in J \setminus \{i_1, \dots, i_n\}$, im Widerspruch zu $e^i \notin X'$ für alle $i \in J$.

Da $(X', \sigma(X', X))$ ein Semi-Montel-Raum ist, ist nunmehr wegen Hilfssatz (5.2) auch $X' + [e^i : i \in I]$ mit der von $\sigma(X^*, X)$ induzierten Topologie ein Semi-Montel-Raum.

Jedes Element von X^* ist $\sigma(X^*, X)$ -Limes eines beschränkten Netzes in $[e^i : i \in I]$; $X' + [e^i : i \in I]$ ist als Semi-Montel-Raum insbesondere quasivollständig. Daher ist $X' + [e^i : i \in I]$ gleich X^* . X' ist also endlich kodimensional in X^* .

Wäre $X' \neq X^*$, so gäbe es eine Hyperebene $H \supset X'$ in X^* . H wäre $\sigma(X^*, X)$ -dicht und wegen Hilfssatz (5.2) wäre $(X, \tau(X, H))$ tonneliert.

Das ist nicht der Fall. Ist nämlich $f \in X^* \setminus H$, so gilt
 $\tau(\text{Kern } f, (\text{Kern } f)^*) = \tau(\text{Kern } f, H)$, wie man leicht verifiziert.
 $\tau(\text{Kern } f, H)$ ist also als feinste lokalkonvexe Topologie vollständig, $\tau(X, H) \cap \text{Kern } f$ ist unvollständig. Folglich ist
 $(\text{Kern } f, \tau(X, H) \cap \text{Kern } f)$ kein Mackey-Raum und damit $(X, \tau(X, H))$
nicht tonneliert, denn Hyperebenen tonnelierter Räume sind insbesondere Mackey-Räume (vgl. J. Dieudonné [5, p. 51]).
Es gilt also $X' = X^*$. Da (X, τ) als tonnelierter Raum insbesondere Mackey-Raum ist, folgt hieraus $\tau = \tau(X, X^*)$ im Widerspruch zur Voraussetzung. $\cdot/\cdot$

Folgerung 1: Das stetige Dual eines tonnelierten separierten Raums ist entweder gleich dem algebraischen Dual oder überabzählbar kodimensional darin.

Folgerung 2: Ist (X, τ) tonneliert und separiert, so ist τ gleich der feinsten lokalkonvexen Topologie, die auf den unendlich kodimensionalen τ -dichten linearen Teilräumen von X mit τ übereinstimmt.

Beweis:

Ist $X' = X^*$, so ist nichts zu zeigen. Es sei also im folgenden $X' \neq X^*$. Nach Hilfssatz (5.3) gibt es dann einen unendlich kodimensionalen τ -dichten linearen Teilraum L in X .

Ist σ die feinste lokalkonvexe Topologie auf X , die auf den unendlich kodimensionalen τ -dichten linearen Teilräumen von X mit τ übereinstimmt und U eine σ -abgeschlossene σ -Nullumgebung in X , so ist $U \cap L$ eine $(\tau \cap L)$ -Nullumgebung in L und folglich $\overline{U \cap L}^\tau$ eine τ -Nullumgebung in X . Ist $x \in \overline{U \cap L}^\tau$, so ist $L + [x]$ unendlich kodimensional und τ -dicht in X ; aus
 $\sigma \cap (L + [x]) = \tau \cap (L + [x])$ folgt $x \in \overline{U \cap L}^\tau \subset U$.

Es gilt also $\overline{U \cap L}^\tau \subset U$, und damit ist U auch τ -Nullumgebung in X . Damit ist $\sigma \subset \tau$ gezeigt. Die Inklusion $\sigma \supset \tau$ ist nach Definition von σ klar. $\cdot/\cdot$

5.4 Hilfssatz: Es sei (X, τ) ein separierter lokalkonvexer Raum, $L \subset X$ sei dichter linearer Teilraum, $(L, \tau \cap L)$ sei tonneliert; ferner sei $Y \subset L^\perp (\subset X^*)$ ein linearer Teilraum. Dann gilt:
 $\beta(X, X' + Y)/L = \beta(X/L, Y)$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß $\beta(X, X' + Y)/L$ gröber als $\beta(X/L, Y)$ ist (nach G.Köthe [13, p.281] gilt stets $\beta(X, X' + Y)/L \supset \beta(X/L, Y)$).

Zunächst gilt: Die kanonische Projektion

$$\begin{aligned} \varphi: (X' + Y, \mathfrak{G}(X' + Y, X)) &\longrightarrow (X', \mathfrak{G}(X', X)) \\ x' + y &\longmapsto x' \quad (x' \in X', y \in Y) \end{aligned}$$

ist beschränkt.

Sei hierzu $B \subset X' + Y$ eine $\mathfrak{G}(X' + Y, X)$ -beschränkte Menge.

$\varphi: (X' + Y, \mathfrak{G}(X' + Y, X)) \longrightarrow (X', \mathfrak{G}(X', L))$ ist stetig, denn die Abbildung $(X' + Y, \mathfrak{G}(X' + Y, X)) \longrightarrow \mathbb{K}, x' + y \longmapsto x'(1)$ ($x' \in X', y \in Y$) ist stetig für alle $1 \in L$.

$\varphi(B)$ ist also $\mathfrak{G}(X', L)$ -beschränkt in X' ; folglich ist

$(\varphi(B))^{\text{OL}}$ eine absolutkonvexe $\mathfrak{G}(L, X')$ -abgeschlossene und absorbante Teilmenge von L . Da $(\varphi(B))^{\text{OL}}$ auch $(\mathfrak{I} \cap L)$ -abgeschlossen ist (G.Köthe [13, p.246]), ist $(\varphi(B))^{\text{OL}}$ eine Tonne in L und wegen der Tonnelliertheit von L eine $(\mathfrak{I} \cap L)$ -Nullumgebung.

$(\varphi(B))^{\text{OL}}$ ist aus diesem Grund eine $\mathfrak{I}$ -Nullumgebung in X .

$(\varphi(B))^{\text{OX}}$ ist $\mathfrak{I}$ -abgeschlossen in X , umfaßt also $(\varphi(B))^{\text{OL}}$ und ist deswegen insbesondere absorbant in X . Es folgt, daß $\varphi(B)$ $\mathfrak{G}(X', X)$ -beschränkt in X' ist.

Es sei jetzt $U \in \mathcal{U}_0(X, \beta(X, X' + Y))$. Wir können o.E. U als absolutkonvex und $\mathfrak{G}(X, X' + Y)$ -abgeschlossen voraussetzen. Dann ist

$B := U^{\text{O}}(X' + Y)$ eine $(X' + Y, X)$ -beschränkte Teilmenge von $X' + Y$.

Man hat: $B \subset \varphi(B) + (\text{id}_{X' + Y} - \varphi)(B)$.

Auf Grund obiger Aussage ist $\varphi(B)$ beschränkt in $\mathfrak{G}(X', X)$;

$(\text{id}_{X' + Y} - \varphi)(B)$ ist folglich eine $(\mathfrak{G}(X' + Y, X) \cap Y)$ -beschränkte Teilmenge von Y ; wegen $Y \subset L^+$ erhält man hieraus, daß

$(\text{id}_{X' + Y} - \varphi)(B)$ beschränkt ist bezüglich $\mathfrak{G}(Y, X/L)$.

Insgesamt hat man nun: Es existiert $B_1 \subset X'$ absolutkonvex und $\mathfrak{G}(X', X)$ -beschränkt und $B_2 \subset Y$ $\mathfrak{G}(Y, X/L)$ -beschränkt derart, daß $B \subset \Gamma(B_1 \cup B_2)$ erfüllt ist.

$B_2^{\text{O}}(X/L)$ ist eine $\beta(X/L, Y)$ -Nullumgebung.

Wir zeigen: $B_2^{\text{O}}(X/L) \subset q(U)$ (mit $q: X \rightarrow X/L$ kanonisch), womit dann der Hilfssatz bewiesen ist.

Zunächst gilt: $B_2^{\text{O}}(X/L) = q(B_2^{\text{OX}})$, da $\langle x, y \rangle = \langle q(x), y \rangle$ für alle

$x \in X$ und $y \in Y$ (vgl. G.Köthe [13, p.278]).

Ist $b \in B_2^{oX}$, so existiert ein $l \in L$ mit $b + l \in B_1^{oX}$, denn B_1^{oX} ist wegen der Tonneliertheit von $(X, \mathcal{T})$ eine $\mathcal{T}$ -Nullumgebung in X und L ist $\mathcal{T}$ -dicht in X . Da l auf B_2 verschwindet, ist $b + l$ in B_2^{oX} , und man erhält $b \in (B_1^{oX} \cap B_2^{oX}) + L$, d.h.

$B_2^{oX} \subset (B_1^{oX} \cap B_2^{oX}) + L$. Diese Überlegungen ergeben:

$$B_2^{o(X/L)} = q(B_2^{oX}) \subset q(B_1^{oX} \cap B_2^{oX}) \underset{(1)}{\subset} q(B_1^{oX}) \underset{(2)}{\subset} q(U).$$

(Die Inklusion (1) folgt aus G.Köthe [13, p.248(9), p.247(3) und (1)b], die Inklusion (2) aus dem Bipolaren-Satz und der $\mathcal{G}(X' + Y, X)$ -Abgeschlossenheit von U .) $\cdot/\cdot$

5.5 Hilfssatz: Es sei $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer linearer Raum, L und P seien Teilmengen von Y , L sei abgeschlossen und vollständig, P sei abgeschlossen und präkompakt. Dann ist $L + P$ abgeschlossen in $(Y, \mathcal{T})$.

Beweis:

Da L wegen W.Roelcke [24, II, p.139] eine $\tilde{\mathcal{T}}$ -abgeschlossene Teilmenge von $\tilde{Y}$ ist und $\overline{P}^{\tilde{\mathcal{T}}}$ kompakt ist, ist $L + \overline{P}^{\tilde{\mathcal{T}}}$ eine $\tilde{\mathcal{T}}$ -abgeschlossene Teilmenge von $\tilde{Y}$. Damit ist $(L + \overline{P}^{\tilde{\mathcal{T}}}) \cap Y$ abgeschlossen in $(Y, \mathcal{T})$. Aus $(L + \overline{P}^{\tilde{\mathcal{T}}}) \cap Y = L + \overline{P}^{\tilde{\mathcal{T}}} \cap Y = L + P$ folgt die Behauptung. $\cdot/\cdot$

5.6 Hilfssatz: Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein halbmétrisierbarer lokalkonvexer Raum, $L \subset X$ sei ein $\mathcal{T}$ -abgeschlossener vollständiger linearer Teilraum, $q: X \rightarrow X/L$ kanonisch und $P \subset X/L$ sei $(\mathcal{T}/L)$ -präkompakt. Dann gibt es eine präkompakte Teilmenge Q von X mit $q(Q) \supset P$.

Beweis:

Da $(X/L, \mathcal{T}/L)$ métrisierbar und lokalkonvex ist, gibt es eine $(\mathcal{T}/L)$ -Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X/L derart, daß P eine Teilmenge von

$$\overline{\Gamma(\{x_n: n \in \mathbb{N}\})}^{\mathcal{T}/L} \text{ ist (G.Köthe [13, § 21, 10(3)]). Da } (X, \mathcal{T})$$

halbmétrisierbar ist, gibt es eine $\mathcal{T}$ -Nullfolge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit

$$q(y_n) = x_n \quad (n \in \mathbb{N}). \quad Q := \overline{\Gamma(\{y_n: n \in \mathbb{N}\})}^{\mathcal{T}} \text{ ist eine abgeschlossene}$$

$\mathcal{T}$ -präkompakte Teilmenge von X . Nach Hilfssatz (5.5) ist $L + Q$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$. Damit ist $q(Q)$ abgeschlossen in $(X/L, \mathcal{T}/L)$.

Aus $q(Q) \supset \overline{\Gamma(\{x_n: n \in \mathbb{N}\})}^{\mathcal{T}/L}$ folgt somit $q(Q) \supset P$. $\cdot/\cdot$

Anmerkung: In Hilfssatz (5.6) ist die Voraussetzung:

"L vollständig" nicht überflüssig, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt.

Es sei $(X, \mathcal{T})$ das Geradenprodukt $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und L der dichte lineare Teilraum $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Ist $A \subset X$ eine präkompakte Teilmenge, so ist $[A + L] \neq X$, da A in einem Produkt von Intervallen $\prod_{n \in \mathbb{N}} I_n$

mit $I_n \subset \mathbb{K}$ kompakt enthalten ist.

Da $\dim X = \text{card}(\mathbb{R})$ und $\dim L = \text{card}(\mathbb{N})$, ist die Dimension des Quotienten X/L gleich $\text{card}(\mathbb{R})$. X/L ist folglich algebraisch isomorph zu $l^\infty(\mathbb{N}) \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Sei $\mathcal{T}$ eine separierte lokalkonvexe Topologie derart, daß $(X/L, \mathcal{T})$ und l^∞ mit der von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ induzierten Topologie topologisch isomorph sind.

$(X/L, \mathcal{T})$ ist dann ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum, der eine absorbante präkompakte Teilmenge P besitzt. $\mathcal{R}$ bezeichne die Initialtopologie auf X bezüglich der Identität $\text{id}_X: X \rightarrow (X, \mathcal{T})$ und der Quotientenabbildung $q: X \rightarrow (X/L, \mathcal{T})$.

Nach Lemma (2.2.1) gilt $\mathcal{R}/L = \mathcal{T}$, $\mathbb{I}^{\mathcal{R}} = L$ und $\mathcal{R} \cap L = \mathcal{T} \cap L$.

Nach E.Hewitt, K.Ross [11, p.47] ist folglich $(X, \mathcal{R})$ metrisierbar. Das Paar $((X, \mathcal{R}), L)$ erfüllt also alle Voraussetzungen von Hilfssatz (5.6) mit Ausnahme der Vollständigkeit von $(L, \mathcal{R} \cap L)$.

Es gibt aber keine $\mathcal{R}$ -präkompakte Teilmenge $Q \subset X$ mit $q(Q) \supset P$. Andernfalls wäre Q insbesondere $\mathcal{T}$ -präkompakt und $Q + L$ absorbant in X (da P absorbant in X/L ist) im Widerspruch zu $[Q + L] \neq X$. $\times$

(5.7) Hilfssatz: Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer linearer Raum, $M \subset X$ ein dichter linearer Teilraum, $L \subset X$ ein beliebiger linearer Teilraum. Dann gilt:

a) $(\mathcal{T} \cap M)_1 = \mathcal{T}_1 \cap M$,

b) $\mathcal{T}_1/L = (\mathcal{T}/L)_1$.

Beweis:

a) Da $\mathcal{T}_1 \cap M$ lokalkonvex und gröber als $\mathcal{T} \cap M$ ist, genügt es $(\mathcal{T} \cap M)_1 \subset \mathcal{T}_1 \cap M$ zu zeigen. Sei hierzu $U \in \mathcal{U}_0(M, \mathcal{T} \cap M)$ absolutkonvex und $(\mathcal{T} \cap M)_1$ -abgeschlossen. Dann ist $\bar{U}^{\mathcal{T}}$ eine absolutkonvexe $\mathcal{T}$ -Nullumgebung in X, da auch in nicht notwendig lokalkonvexen linearen Topologien die abgeschlossene Hülle einer absolutkonvexen Menge wieder absolutkonvex ist (G.Köthe [13, p.178(5)]). Damit ist $U = \bar{U}^{\mathcal{T}} \cap M$ eine $(\mathcal{T}_1 \cap M)$ -Nullumgebung in M.

b) Sei $\alpha: X \rightarrow X/L$ kanonisch. Da $\mathcal{V}_1/L \subset \mathcal{V}/L$ und $\mathcal{V}_1/L$ lokal-konvex ist, gilt $\mathcal{V}_1/L \subset (\mathcal{V}/L)_1$.

$q: (X, \mathcal{V}_1) \rightarrow (X/L, (\mathcal{V}/L)_1)$ ist stetig, also ist $(\mathcal{V}/L)_1 \subset \mathcal{V}_1/L$. $\cdot/$.

5.8 Hilfssatz (W. Roelcke [23]):

Es sei Y ein $\mathbb{K}$ -linearer Raum, $L \subset Y$ ein linearer Teilraum; $\mathcal{T} \subset \mathcal{V}$ seien lineare Topologien auf Y mit $\mathcal{T} \cap L = \mathcal{V} \cap L$ und $\mathcal{T}/L = \mathcal{V}/L$. Dann gilt $\mathcal{T} = \mathcal{V}$.

Beweis: Sei $U \in \mathcal{U}_0(Y, \mathcal{V})$. Dann gibt es zu $V \in \mathcal{U}_0(Y, \mathcal{T})$ ein $W_V \in \mathcal{U}_0(Y, \mathcal{T})$ mit $W_V \subset V$ und $W_V \subset U \cap V + L$.

Daraus folgt $W_V \subset U \cap V + L \cap (W_V - U \cap V) \subset U \cap V + L \cap (V - V)$.

Wählen wir $V \in \mathcal{U}_0(Y, \mathcal{T})$ so, daß $(V - V) \cap L \subset U \cap L$, so folgt:

$W_V \subset U + U$, d.h. $U + U \in \mathcal{U}_0(Y, \mathcal{T})$. $\cdot/$.

Folgerung 1: Ist $(Y, \mathcal{V})$ lokalkonvex, $L \subset Y$ ein linearer Teilraum, $\mathcal{V} \cap L = \mathcal{S}(L, L')$ und $\mathcal{V}/L = \mathcal{S}(Y/L, (Y/L)')$, so ist $\mathcal{V} = \mathcal{S}(Y, Y')$.

Beweis:

Es gilt $\mathcal{V} \supset \mathcal{S}(Y, Y')$, $\mathcal{S}(Y, Y') \cap L = \mathcal{S}(L, L') = \mathcal{V} \cap L$ und

$\mathcal{S}(Y, Y')/L = \mathcal{S}(Y/L, (Y/L)') = \mathcal{V}/L$ (G. Köthe [13, p. 279 und 280]).

Mit Hilfssatz (5.8) erhält man nun: $\mathcal{V} = \mathcal{S}(Y, Y')$. $\cdot/$.

Folgerung 2: Ist $(Y, \mathcal{T})$ lokalkonvex, $L \subset Y$ ein linearer Teilraum, und sind $(L, \mathcal{T} \cap L)$ und $(Y/L, \mathcal{T}/L)$ Mackey-Räume, so ist auch $(Y, \mathcal{T})$ ein Mackey-Raum.

Beweis:

Es gilt $\tau(Y, Y') \supset \mathcal{T}$, $\tau(Y, Y')/L = \tau(Y/L, (Y/L)')$ und

$\tau(L, L') \supset \tau(Y, Y') \cap L \supset \mathcal{T} \cap L = \tau(L, L')$ (G. Köthe, loc. cit.).

Mit Hilfssatz (5.8) erhält man nun: $\mathcal{T} = \tau(Y, Y')$. $\cdot/$.

5.9 Hilfssatz: Es sei X ein topologischer linearer Raum, L, M, N lineare Teilräume von X mit $M \cap N = L$ und $M \subset \bar{L}$. Dann sind N/L und $(N + M)/M$ topologisch isomorph.

Beweis:

$f: N/L \rightarrow (N + M)/M$ definiert durch $f(n + L) := n + M$ ($n \in N$) ist linear, stetig und bijektiv.

Wir zeigen die Stetigkeit von f^{-1} .

Sei hierzu $U \in \mathcal{U}_0(N)$; es gibt $V \in \mathcal{U}_0(N + M)$ mit
 $(V - V) \cap N \subset U$, und es gilt $f^{-1}(V + M) \subset U + L$.

Ist nämlich $v = n + m \in V$ mit $n \in N$ und $m \in M$, so gibt es wegen
 $L \subset M \subset \bar{L}$ ein $l \in L$ mit $l + m \in V \cap M$ und es folgt:

$$f^{-1}(v + M) = n + L = (n + m) - (m + l) + L \in (V - V) \cap N + L \subset U + L. \quad \cdot/. \quad \text{---} \cdot \text{---}$$

Literatur

- [1] Amemyia, I., Kōmura, Y.: Über nicht-vollständige Montelräume.
Math.Ann.177(1968), pp.273-277.
- [2] Bourbaki, N.: Topologie Générale. Chap. I-IV. Hermann Paris
1965.
- [3] Bourbaki, N.: Espaces Vectoriels Topologiques. Chap I-V.
Hermann Paris 1966.
- [4] Collins, H.S.: Completeness and Compactness in Linear Topological Spaces. Trans.Amer.Math.Soc.79(1955), pp.256-280.
- [5] Dieudonné, J.: Sur les propriétés de permanence de certains espaces vectoriels topologiques. Ann.Soc.Pol.Math.Cracow
25(1952), pp.50-55.
- [6] Dieudonné, J., Schwartz, L.: La dualité dans les espaces (F) et (LF). Ann.l'Inst.Fourier 1(1949), pp.61-101.
- [7] De Wilde, M., Houet, C.: On increasing sequences of absolutely convex sets in locally convex spaces.
Math.Ann.192(1971), pp.257-261.
- [8] Eberhardt, V.: Über einen Graphensatz für Abbildungen mit normiertem Zielraum. Manuscrpta Math.12(1974), pp.47-65.
- [9] Graev, M.I.: Theory of topological groups I.
Uspehi Mat.Nauk 5(1950), pp.3-56.
- [10] Grothendieck, A.: Sur les espaces (F) et (DF).
Summa Brasil.Math.3(1954), pp.57-112.
- [11] Hewitt, E., Ross, K.: Abstract harmonic analysis I. Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963
- [12] Horváth, J.: Topological Vector Spaces and Distributions I. Addison-Wesley Publ.Comp. London 1966
- [12a] Kelley, J.L., Namioka, I. et al.: Linear Topological Spaces
Van Nostrand Princeton 1963
- [13] Köthe, G.: Topologische lineare Räume I. Springer-Verlag
Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960
- [13a] Köthe, G.: Topological Vector Spaces I. Springer-Verlag
Berlin-Heidelberg-New York 1969

- [14] Köthe, G.: Die Quotientenräume eines linearen vollkommenen Raums. Math.Z.51(1947), pp.17-35.
- [15] Köthe, G.: Vollständige lokalkonvexe Räume abzählbarer Dimension. Archiv d.Math.13(1962), pp.377-384.
- [16] Krein, M., Šmulian, V.: On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space. Math.Ann.41(1940), pp.556-583
- [17] Mackey, G.W.: On infinite dimensional linear spaces. Trans.Amer.Math.Soc.57(1945), pp.155-207.
- [18] Pietsch, A.: Nukleare lokalkonvexe Räume. Akademie Verlag Berlin 1969.
- [19] Porta, H.: Compactly Determined Locally Convex Topologies. Math.Ann.196(1972), pp.91-100.
- [20] Pták, V.: Completeness and the Open Mapping Theorem. Bull.Soc.Math.France 86(1958), pp.41-74.
- [21] Robertson, A.P., Robertson, W.: On the Closed Graph Theorem. Proc.of the Glasgow Math.Ass.3(1956), pp.9-12.
- [22] Robertson, W.: Completions of topological vector spaces. Proc.London Math.Soc.8(1958), pp.242-257.
- [23] Roelcke, W.: Einige Permanenzeigenschaften bei topologischen Gruppen und topologischen Vektorräumen. Vortrag auf der Funktionalanalysisstagung in Oberwolfach 1972.
- [24] Roelcke, W.: Topologische lineare Räume I und II Vorlesungsausarbeitung München 1968/69.
- [25] Roelcke, W., Lurje, P., Dierolf, S., Eberhardt, V.: Einige Beispiele über Bairesche normierte und ultrabornologische Räume. Archiv d.Math.23(1972), pp.513-519.
- [26] Saxon, A.S.: Nuklear and product spaces, Baire-like spaces, and the strongest locally convex topology. Math.Ann.197(1972), pp.87-106.
- [27] Valdivia, M.: A hereditary property in locally convex spaces. Ann.Inst.Fourier Grenoble 21(1971), pp.1-2.
- [28] Valdivia, M.: Absolutely convex sets in barrelled spaces. Ann.Inst.Fourier Grenoble 21(1971), p.3-13.

- [29] Valdivia, M.: On final topologies. J.reine angew.Math.251
(1971), pp.193-199.
- [30] Valdivia, M.: Some examples on quasi-barrelled spaces.
Ann.Inst.Fourier Grenoble 22(1972), pp.21-26.

Lebenslauf

Geburtsdatum: 16.7.1942

Geburtsort: Preßburg (Slowakei)

Schulbildung, Studium und Beruf:

1948 - 1952 Volksschule in Marquartstein

1952 - 1960 Oberrealschule in Marquartstein

17.7.1963 Abitur als Privatschülerin an der
Oberrealschule Landshut

1964 - 1970 Studium an der Universität München

19.12.1969 Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt
in Mathematik und Russisch

1970 - 1974 Wissenschaftliche Mitarbeiterin am mathematischen
Institut der Technischen Universität München

Ab 1.10.1974 Verwalterin der Dienstgeschäfte eines wissen-
schaftlichen Assistenten am mathematischen
Institut der Universität München

Garching, im Dezember 1974

